მასწავლებლის კომპეტენციის დამადასტურებელი

ტესტის პასუხები

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
გ	ბ	ა	გ	ბ	დ	ა	გ	ა	გ	გ	ბ	ა	დ	ბ

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
გ	ბ	დ	ა	ბ	დ	გ	გ	ა	ბ	დ	ა	დ	დ	ბ

ამოცანა 31 **10 ქულა**

თემის „მონაცემთა რიცხვითი მახასიათებლების“ შესწავლის შემდეგ მოსწავლეებს საშინაო დავალებად ჰქონდათ შემდეგი ამოცანა:

„კომპანიის ხელოსნის გამოძახების ღირებულება გამოითვლება ფორმულით $C = 30 + 18T$, სადაც C არის თანხა ლარებში, ხოლო T - ხელოსნის მიერ შესრულებული სამუშაოს ხანგრძლივობა საათებში. ერთი თვის განმავლობაში ამ კომპანიის ხელოსნების მიერ თითოეული გამოძახების ხანგრძლივობებით შედგენილი მონაცემების საშუალოა 1,5სთ, გაბნევის დიაპაზონი - 3სთ და 20წთ, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა კი - 50წთ.

თუ ამ ერთი თვის განმავლობაში ხელოსნების გამოძახების ღირებულებებით შევადგენთ მონაცემებს, მაშინ რისი ტოლი იქნება მათი საშუალო, გაბნევის დიაპაზონი და საშუალო კვადრატული გადახრა?“

ერთ-ერთმა მოსწავლემ ამ ამოცანის ამოხსნა შემდეგი ცხრილით წარმოადგინა:

	სამუშაოს ხანგრძლივობა T (სთ)	გამოძახების ღირებულება C (ლარი)
საშუალო	$\frac{3}{2}$	$30 + 18 \cdot \frac{3}{2} = 57$
გაბნევის დიაპაზონი	$\frac{10}{3}$	$30 + 18 \cdot \frac{10}{3} = 90$
საშ. კვ. გადახრა	$\frac{5}{6}$	$30 + 18 \cdot \frac{5}{6} = 45$

თქვენი დავალებაა:

1) გაახსენოთ მოსწავლეებს შემდეგი ცნებები: რიცხვით მონაცემთა საშუალო, გაბნევის დიაპაზონი და საშუალო კვადრატული გადახრა. **(3 ქულა)**
2) მიუთითოთ რა შეცდომა/შეცდომები დაუშვა მოსწავლემ ამოხსნაში. ამოხსენით ამოცანა, მსჯელობა აწარმოეთ ნათლად, მოსწავლისთვის გასაგებ ენაზე. **(7 ქულა)**

პასუხის ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება:

31.1) ვთქვათ მოცემული გვაქვს N ცალი რიცხვითი მონაცემი: $x_1, x_2, \ldots, x_N$. მაშინ მათი საშუალო μ წარმოადგენს მონაცემების ჯამის $x_1 + x_2 + \ldots + x_N$ განაყოფს მათ საერთო რაოდენობაზე N-ზე, ანუ

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}.$$

მონაცემების გაბნევის დიაპაზონის საპოვნელად კი მონაცემებს შორის უდიდესს უნდა გამოვაკლოთ მათ შორის უმცირესი.

საშუალო კვადრატული გადახრა σ კი გამოითვლება ფორმულით

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \ldots + (x_N - \mu)^2}{N}}.$$

31.2) მოსწავლემ გამოძახების ღირებულების საშუალო სწორად გამოთვალა, ხოლო შეცდომა დაუშვა გამოძახების ღირებულების გაბნევის დიაპაზონისა და საშ. კვ. გადახრის პოვნისას. მართლაც, ვთქვათ კომპანიის ხელოსნების მიერ ერთი თვის განმავლობაში N ცალი გამოძახების ხანგრძლივობებია $T_1, T_2, \ldots, T_N$, რომლებიც, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ დალაგებულია ზრდის მიხედვით. მაშინ გამოძახებების ღირებულებებისთვის გვექნება შემდეგი მონაცემები $30 + 18T_1, 30 + 18T_2, \ldots, 30 + 18T_N$, რომელიც ასევე ზრდადობით იქნება დალაგებული. მათი საშუალო μ_C ტოლია

$$\mu_C = \frac{(30 + 18T_1) + (30 + 18T_2) + \ldots + (30 + 18T_N)}{N} = \frac{30N + 18(T_1 + T_2 + \ldots + T_N)}{N} =$$
$$= 30 + 18\frac{T_1 + T_2 + \ldots + T_N}{N} = 30 + 18\mu_T,$$

სადაც μ_T გამოძახებების ხარგრძლივობების საშუალოა და პირობის თანახმად $\mu_T = \frac{3}{2}$ სთ. მაშასადამე, $\mu_C = 30 + 18 \cdot \frac{3}{2} = 57$ ლარი. გამოძახებების ხანგრძლივობების გაბნევის დიაპაზონია $T_N - T_1$ (რადგან მონაცემებში უდიდესი რიცხვია T_N, ხოლო უმცირესი რიცხვია T_1). ცხადია გამოძახებების ღირებულებებისთვის უდიდესი მნიშვნელობა იქნება $30 + 18T_N$, ხოლო უმცირესი $30 + 18T_1$. ამიტომ გამოძახებების ღირებულებებისთვის გაბნევის დიაპაზონი იქნება $30 + 18T_N - (30 + 18T_1) = 18(T_N - T_1)$, რომელიც პირობის თანახმად $18 \cdot \frac{10}{3} = 60$ ლარის ტოლია.

გამოძახებების ღირებულებებისთვის საშ. კვ. გადახრის გამოსათვლელად გვექნება

$$\sigma_C = \sqrt{\frac{(30+18T_1-\mu_C)^2+(30+18T_2-\mu_C)^2+\ldots+(30+18T_N-\mu_C)^2}{N}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(30+18T_1-30-18\mu_T)^2+(30+18T_2-30-18\mu_T)^2+\ldots+(30+18T_N-30-18\mu_T)^2}{N}} =$$

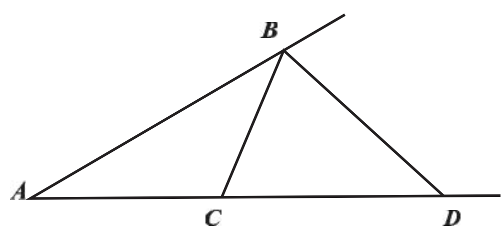
$$= \sqrt{\frac{(18T_1-18\mu_T)^2+(18T_2-18\mu_T)^2+\ldots+(18T_N-18\mu_T)^2}{N}} =$$

$$= 18\sqrt{\frac{(T_1-\mu_T)^2+(T_2-\mu_T)^2+\ldots+(T_N-\mu_T)^2}{N}} = 18\sigma_T,$$

სადაც σ_T გამოძახებების ხარგრძლივობების საშ. კვადრატული გადახრაა და პირობის თანახმად $\sigma_T = \frac{5}{6}$ სთ. მაშასადამე $\sigma_C = 18\cdot\frac{5}{6} = 15$ სთ.

ამოცანა 32 **5 ქულა**

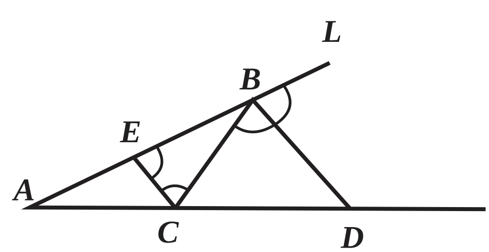
ABC სამკუთხედის B წვეროსთან მდებარე გარე კუთხის ბისექტრისა AC სხივს კვეთს D წერტილში (იხ. სურათი). დაამტკიცეთ, რომ $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$. მსჯელობა აწარმოეთ ნათლად, მოსწავლისთვის გასაგებ ენაზე.



პასუხის ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება:

ამოხსნა 1

C წერტილზე გავალოთ BD ბისექტრისის პარალელური CE მონაკვეთი (იხ. სურათი). მაშინ, $\angle ECB = \angle DBC$ როგორც ჯვარედინად მდებარე კუთხეები, ხოლო $\angle CEB = \angle DBL$, როგორც ცალმხრივ მდებარე კუთხეები. რადგან $\angle CBD = \angle DBL$, ამიტომ $\angle ECB = \angle CEB$ და



მაშასადამე $EB = CB$, როგორც CEB ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდები.

$\triangle AEC \sim \triangle ABD$, ამიტომ $\frac{EA}{BA} = \frac{AC}{AD}$.

$$\frac{BA - EB}{BA} = \frac{AD - CD}{AD} \Leftrightarrow 1 - \frac{EB}{BA} = 1 - \frac{CD}{AD} \Leftrightarrow \frac{EB}{BA} = \frac{CD}{AD} \Leftrightarrow \frac{BC}{BA} = \frac{CD}{AD} \Leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}.$$

ამოხსნა 2

$\triangle ABD$ სამკუთხედში სინუსების თეორემის გამოყენება გვაძლევს $\frac{AB}{AD} = \frac{\sin \widehat{BDC}}{\sin \widehat{ABD}}$ ტოლობას .

ანალოგიურად, $\triangle CBD$ სამკუთხედში სინუსების თეორემის გამოყენება გვაძლევს $\frac{BC}{CD} = \frac{\sin \widehat{BDC}}{\sin \widehat{CBD}}$ ტოლობას . რადგან $\sin \widehat{ABD} = \sin\left(180° - \widehat{DBL}\right) = \sin \widehat{DBL} = \sin \widehat{CBD}$.

ამიტომ, $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD} \Leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაწერა $\frac{AB}{AD} = \frac{\sin \widehat{BDC}}{\sin \widehat{ABD}}$ ან $\frac{BC}{CD} = \frac{\sin \widehat{BDC}}{\sin \widehat{CBD}}$ ტოლობა (ან მათი ტოლფასი ტოლობები);

ბ) დაწერა $\frac{AB}{AD} = \frac{\sin \widehat{BDC}}{\sin \widehat{ABD}}$ და $\frac{BC}{CD} = \frac{\sin \widehat{BDC}}{\sin \widehat{CBD}}$ ტოლობები;

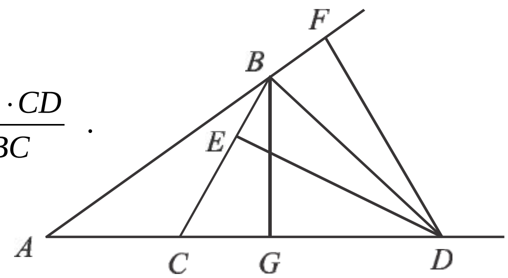
გ) შენიშნა $\sin \widehat{ABD} = \sin\left(180° - \widehat{DBL}\right) = \sin \widehat{DBL} = \sin \widehat{CBD}$;

დ) მიიღო $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$ ტოლობა;

ე) მიიღო საძიებელი ტოლობა.

ამოხსნა 3

D წერტილიდან დავუშვათ DE და DF მართობები BE და BF სხივებზე. ხოლო B წერტილიდან დავუშვათ BG მართობი AD წრფეზე.



$S_{CBD} = \frac{1}{2} DE \cdot BC = \frac{1}{2} BG \cdot CD$, საიდანაც $DE = \frac{BG \cdot CD}{BC}$.

ანალოგიურად, $S_{ABD} = \frac{1}{2} DF \cdot AB = \frac{1}{2} BG \cdot AD$,

საიდანაც

$DF = \frac{BG \cdot AD}{AB}$. ბისექტრისის თვისების გამო $DE = DF$, ამიტომ $\frac{BG \cdot CD}{BC} = \frac{BG \cdot AD}{AB}$.

აქედან ვღებულობთ $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი პროპორცია $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$.

ამოცანა 33 **7 ქულა**

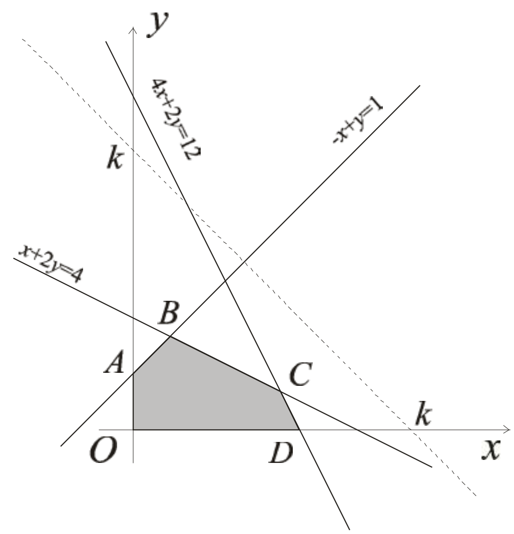
ამოხსენით წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა გრაფიკული მეთოდით და ამოხსნა წარმოადგინეთ მოსწავლისთვის გასაგებ ენაზე.

> იპოვეთ $x + y$ გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა, თუ x და y ცვლადები აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{cases} x + 2y \le 4 \\ 4x + 2y \le 12 \\ -x + y \le 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

პასუხის ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება:

ამოვხსნათ მოცემული წრფივი დაპროგრამების ამოცანა გრაფიკული მეთოდით, ამისთვის ავაგოთ $x+2y=4$, $4x+2y=12$, $-x+y=1$, $x=0$, $y=0$ წრფეების გრაფიკები Oxy საკოორდინატო სიბრტყეზე.



მოცემულ უტოლობათა სისტემას Oxy საკოორდინატო სიბრტყეზე შეესაბამება $OABCD$ ამოზნექილი ხუთკუთხედი, იხ. სურათი.

თუ $x+y$-ის მიშვნელობას აღვნიშნავთ k-თი, მაშინ ჩვენი მიზანია k-შევარჩიოთ რაც შეიძლება დიდი ისე, რომ $x+y=k$ წრფე (სურათზე წყვეტილი ხაზებით მოცემული) გადიოდეს $OABCD$ ხუთკუთხედის ერთ წერტილში მაინც. k-ს თანდათანობით შემცირებით, წყვეტილი ხაზებით მოცემული წრფე პარალელურად გადაადგილდება.
ამიტომ სურათის მიხედვით ადვილი დასანახია, რომ $x+y$-ის უდიდეს მნიშვნელობას მიიღებს, თუ $x+y=k$ წრფე გაივლის B ან C წერტილში.
ვიპოვოთ B ან C წერტილების კოორდინატები. ამოვხსნათ შემდეგი სისტემები

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ -x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} x+2y=4 \\ 4x+2y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8}{3} \\ y=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

მაშასადამე $B\left(\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$ და $C\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$. რადგან ერთ შემთხვევაში $k=\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$, ხოლო მეორე შემთხვევაში $k=\frac{8}{3}+\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$, ამიტომ $x+y$ გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობაა $\frac{10}{3}$.

პასუხი: $\frac{10}{3}$