

როგორ მოვემზადოთ
ერთიანი ეროვნული გამოცდებისათვის

მათემატიკა

შეფასებისა და გამოცდების
ეროვნული ცენტრის
მათემატიკის ჯგუფი

თბილისი

2025

სსიპ - „შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრის“ მიერ ვებ-გვერდზე განთავსებული საგამოცდო კრებულები წარმოადგენს ცენტრის საკუთრებას და დაცულია საქართველოს კანონით „საავტორო და მომიჯნავე უფლებების შესახებ“.

სსიპ - „შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი“ ვებ-გვერდის მომხმარებელს / ვიზიტორს აძლევს უფლებას იხილოს და ჩამოტვირთოს აღნიშნული კრებულები, რომლებსაც მხოლოდ საინფორმაციო დანიშნულება აქვს. დაუშვებელია ტექსტში რაიმე ცვლილების შეტანა, რეპროდუქცია, თარგმნა და სხვა საშუალებებით გავრცელება (როგორც ბეჭდვითი, ასევე ელექტრონული ფორმით) სსიპ - „შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრის“ ნებართვის გარეშე. იკრძალება საგამოცდო კრებულების გამოყენება კომერციული მიზნებისათვის.

სარჩევი

შესავალი	-----	4
საგამოცდო დავალების ნიმუშები	-----	5
პასუხები	-----	18

შესავალი

საგამოცდო ტესტი შედგება 41 ამოცანისგან. აქედან პირველი 37 ამოცანიდან თითოეულს თან ახლავს 4 სავარაუდო პასუხი, რომელთაგან მხოლოდ ერთია სწორი. ტესტის ამ ნაწილში თითოეული ამოცანა ფასდება 1 ან 0 ქულით. 1 ქულა იწერება სწორი პასუხის მითითებისთვის.

ამოცანებში ოცდამეთვრამეტედან ორმოცდაერთის ჩათვლით დადებითი შეფასების მისაღებად საკმარისი არ არის მხოლოდ სწორი პასუხის მითითება - აუცილებელია ამოცანის ამოხსნის სრული გზის ჩაწერაც. ტესტის ამ ნაწილის 38 და 39 ამოცანა ფასდება 3 ქულით, 40 და 41 ამოცანა ფასდება 4 ქულით. საგამოცდო ტესტის მაქსიმალური ქულა არის 51.

გისურვებთ წარმატებას!

საგამოცდო დავალების ნიმუში

(1) 1.

$$1\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0,3 =$$

ა) $1\frac{8}{15}$

ბ) $\frac{5}{8}$

გ) 1,5

დ) 0,6

(1) 2.

$$0,0072 =$$

ა) $7,2 \cdot 10^{-3}$

ბ) $72 \cdot 10^{-3}$

გ) $0,72 \cdot 10^{-4}$

დ) $7,2 \cdot 10^{-1}$

(1) 3.

იპოვეთ უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც ნაკლებია $\sqrt{41}$ -ზე.

ა) 5

ბ) 6

გ) 7

დ) 8

(1) 4.

სპილენძისა და ვერცხლის შენადნობში ვერცხლის მასა სპილენძის მასის 25%-ს შეადგენს. შენადნობის მასის რამდენ პროცენტს შეადგენს სპილენძის მასა?

ა) 60%

ბ) 75%

გ) 80%

დ) 84%

(1) 5.

ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხის მოსაზღვრე კუთხის სიდიდე 25° -ის ტოლია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხის სიდიდე.

ა) 155°

ბ) $77,5^\circ$

გ) 25°

დ) $12,5^\circ$

(1) 6.

მართკუთხედის წვეროები ძვეს წრეწირზე. იპოვეთ ამ წრეწირის სიგრძე, თუ მართკუთხედის დიაგონალის სიგრძე $\sqrt{5}$ სმ-ის ტოლია.

ა) 5π სმ

ბ) $\sqrt{5}\pi$ სმ

გ) $2\sqrt{5}\pi$ სმ

დ) $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$ სმ

(1) 7.

წესიერ ექვსკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის სიგრძეა 24π სმ. იპოვეთ ამ ექვსკუთხედის გვერდის სიგრძე.

ა) 12 სმ

ბ) 8 სმ

გ) 6 სმ

დ) 2 სმ

(1) 8.

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} =$$

ა) $\sqrt{3}-1$

ბ) $\sqrt{3}+1$

გ) $2\sqrt{3}$

დ) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(1) 9

$$27^{-\frac{2}{3}} =$$

ა) $\frac{1}{9}$

ბ) 9

გ) -9

დ) $-\frac{1}{9}$

(1) 10.

$$\frac{a^3 - 27}{a^2 + 3a + 9} =$$

ა) $a - 3$

ბ) $\frac{a-3}{a+3}$

გ) -3

დ) $a + 3$

(1) 11.

რა უდიდესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს $\frac{a}{b}$ შეფარდება, თუ $1 \leq a \leq 4$ და $2 \leq b \leq 6$?

ა) 1

ბ) 2

გ) 3

დ) 4

(1) 12.

რამდენი უარყოფითი მთელი ამონახსნი აქვს $\frac{3}{11}x + 2 > 0,3$ უტოლობას?

ა) 5

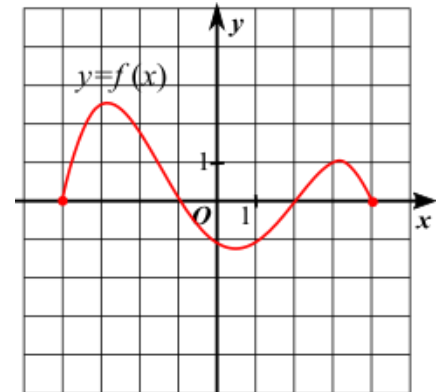
ბ) 6

გ) 7

დ) 8

(1) 13.

საკოორდინატო ბადით დაფარულ სიბრტყეზე მოცემულია $[-4; 4]$ შუალედზე განსაზღვრული $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც აბსცისათა ღერძს კვეთს მთელი კოორდინატების მქონე წერტილებში (იხ. სურათი). იპოვეთ $f(x) > 0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე.



ა) $(-4; -1)$

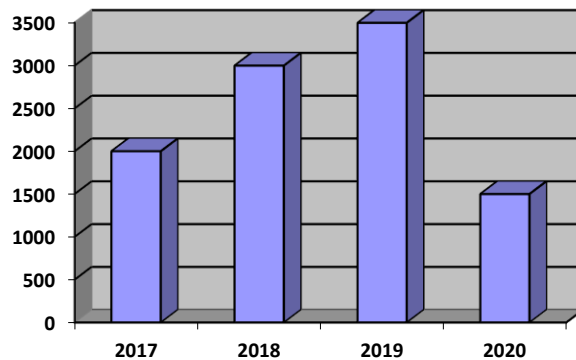
ბ) $(-1; 2)$

გ) $(0; 4)$

დ) $(-4; -1) \cup (2; 4)$

(1) 14.

სურათზე მოცემულია სვეტოვანი დიაგრამა, რომელიც გამოხატავს კომპანიის მიერ ოთხი წლის განმავლობაში ყოველწლიურად გამოშვებული ერთი სახის პროდუქტის რაოდენობას. ყოველი 500 ერთეული პროდუქტი კომპანიას აძლევს 12000 ლარის მოგებას. გამოთვალეთ კომპანიის ჯამური მოგება ამ ოთხი წლის განმავლობაში.



ა) 120000 ლარი

ბ) 216000 ლარი

გ) 200000 ლარი

დ) 240000 ლარი

(1) 15.

იპოვეთ a პარამეტრის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $2x^2 - ax + 3 = 0$ განტოლების ამონახსნთა ჯამი 7-ის ტოლია.

- ა) 14 ბ) -14 გ) $\frac{14}{3}$ დ) 7

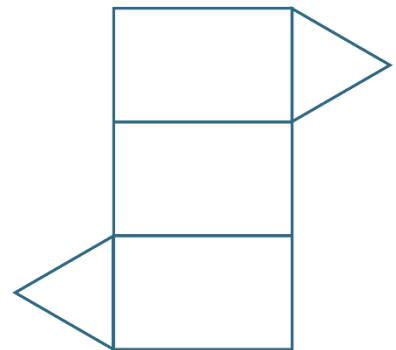
(1) 16.

იპოვეთ x , თუ ცნობილია, რომ 4; 9; 1; 3; 12; x რიცხვითი მონაცემების მედიანა 5,5-ის ტოლია.

- ა) 3 ბ) 4 გ) 5,5 დ) 7

(1) 17.

სურათზე მოცემულია ქვემოთ ჩამოთვლილი მრავალწახნაგებიდან ერთ-ერთის შლილი. დაასახელებთ ეს მრავალწახნაგა.



- ა) სამკუთხა პირამიდა;
ბ) ოთხკუთხა პირამიდა;
გ) სამკუთხა პრიზმა;
დ) ოთხკუთხა პრიზმა.

(1) 18.

ქვემოთ ჩამოთვლილი ფიგურებიდან რომელს არ გააჩნია სიმეტრიის ცენტრი?

- ა) მონაკვეთი;
- ბ) წრე;
- გ) მართკუთხედი;
- დ) წესიერი სამკუთხედი.

(1) 19.

Oxy საკოორდინატო სისტემაში $y = -x$ წრფის მიმართ $(-3; 4)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილია

- ა) $(-4; 3)$
- ბ) $(-3; -4)$
- გ) $(3; -4)$
- დ) $(4; -3)$

(1) 20.

სულ რამდენი ათწილანი ლუწი რიცხვი არსებობს, რომლის ჩანაწერში ოთხი ციფრია „2“, ხოლო ექვსი ციფრია „9“?

- ა) 128
- ბ) 96
- გ) 84
- დ) 64

(1) 21.

მასწავლებელს სურს 8 მოსწავლისგან შეადგინოს 3 ჯგუფი, სადაც ნომერ პირველ და ნომერ მეორე ჯგუფში იქნება სამ-სამი მოსწავლე, ხოლო ნომერ მესამეში კი - ორი მოსწავლე. ჯგუფებში მოსწავლეთა ასეთი განაწილების სულ რამდენი განსხვავებული ვარიანტი არსებობს?

- ა) 280
- ბ) 560
- გ) 640
- დ) 1120

(1) 22.

ართიმეტიკულ პროგრესიაში პირველი ცხრა წევრის ჯამი m -ის ტოლია, ხოლო მეორე წევრიდან მეათე წევრის ჩათვლით პროგრესიის წევრთა ჯამი n -ის ტოლია ($m \neq n$). იპოვეთ ამ პროგრესიის სხვაობა.

ა) $\frac{m-n}{10}$

ბ) $\frac{m-n}{9}$

გ) $\frac{n-m}{10}$

დ) $\frac{n-m}{9}$

(1) 23.

რას უდრის იმის ალბათობა, რომ სამი კამათლის გაგორებისას მოსული რიცხვების ჯამი მეტი იქნება 16-ზე?

ა) $\frac{53}{54}$

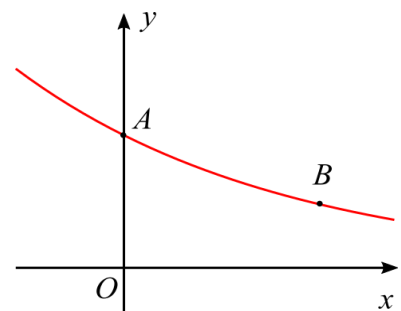
ბ) $\frac{1}{54}$

გ) $\frac{17}{18}$

დ) $\frac{1}{18}$

(1) 24.

$A(0; 3)$ და $B\left(4, \frac{3}{2}\right)$ წერტილები მდებარეობს $f(x) = a \cdot 2^{bx}$ ფუნქციის გრაფიკზე (იხ. სურათი). იპოვეთ $a+b$.



ა) $\frac{5}{2}$

ბ) $\frac{11}{4}$

გ) 3

დ) -1

(1) 25.

რის ტოლია α , თუ $\cos \alpha = -0,7$ და $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$?

- ა) $\pi + \arccos(0,7)$
- ბ) $\arccos(-0,7)$
- გ) $2\pi - \arccos(0,7)$
- დ) $\pi + \arccos(-0,7)$

(1) 26.

ABC სამკუთხედში M და N წერტილები მდებარეობს შესაბამისად AB და BC გვერდებზე ისე, რომ MN მონაკვეთი AC გვერდის პარალელურია. რას უდრის $AC:MN$, თუ BMN სამკუთხედის ფართობი $AMNC$ ოთხკუთხედის ფართობის ტოლია?

- ა) 2
- ბ) $\sqrt{3}$
- გ) 3
- დ) $\sqrt{2}$

(1) 27.

ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი გამოსახულებაა ყოველთვის ჭეშმარიტი \vec{a} და \vec{b} არანულოვანი ვექტორებისთვის?

- ა) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;
- ბ) $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$;
- გ) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq 1$;
- დ) $-1 \leq \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \leq 1$.

(1) 28.

იპოვეთ k პარამეტრის ყველა ნამდვილი მნიშვნელობა, რომელთაგან თითოეულისათვის $|3x+4|-7+k=0$ განტოლებას არ გააჩნია ამონახსნი.

ა) $\left(-\frac{4}{3}; \infty\right)$

ბ) $(-7; \infty)$

გ) $(7; \infty)$

დ) $(-\infty; \infty)$

(1) 29.

ორი ნატურალური რიცხვის ნამრავლი ტოლია 288-ის. ქვემოთ ჩამოთვლილი რიცხვებიდან რომლის ტოლი არ შეიძლება იყოს ამ ორი რიცხვის საერთო ჯერადი?

ა) 24

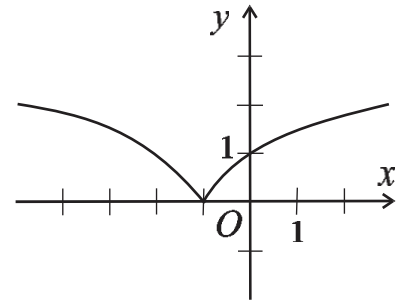
ბ) 36

გ) 48

დ) 96

(1) 30.

სურათზე გამოსახულია ქვემოთ ჩამოთვლილი ფუნქციებიდან ერთ-ერთის გრაფიკი. რომელია ეს ფუნქცია?



ა) $f(x) = \sqrt{|x-1|}$

ბ) $f(x) = \sqrt{|x|} - 1$

გ) $f(x) = \sqrt{|x+1|}$

დ) $f(x) = \sqrt{|x|-1}$

(1) 31.

ქვემოთ ჩამოთვლილი უტოლობებიდან, რომელია ჭეშმარიტი ყოველი α რიცხვისათვის $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედიდან?

ა) $\sin \alpha < \frac{1}{2}$

ბ) $\cos \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$

გ) $\cos \alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$

დ) $\sin \alpha > \frac{3\sqrt{3}}{4}$

(1) 32.

Oxy მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში O წერტილის მიმართ α მახვილი კუთხით მობრუნებას $(3; 1)$ წერტილი გადაჰყავს წერტილში, რომლის აბსცისა 1-ის ტოლია. იპოვეთ α კუთხის რადიანული ზომა.

ა) $\frac{\pi}{3}$

ბ) $\frac{\pi}{6}$

გ) $\arctg\left(\frac{2}{3}\right)$

დ) $\arctg 3 - \arctg\left(\frac{1}{3}\right)$

(1) 33.

იპოვეთ უმცირესი მთელი რიცხვი, რომელიც მეტია $\log_2 11$ -ზე.

ა) 2

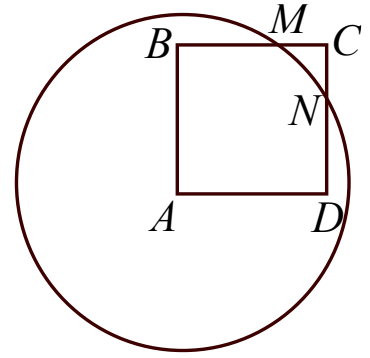
ბ) 3

გ) 4

დ) 5

(1) 34.

$ABCD$ კვადრატის გვერდი $\sqrt{3}$ -ის ტოლია. წრეწირი ცენტრით A წერტილში, კვადრატის BC და CD გვერდებს კვეთს შესაბამისად M და N წერტილებში ისე, რომ $BM = DN = 1$ (იხ. სურათი). იპოვეთ $ABCD$ კვადრატის შიგნით მდებარე MN რკალის გრადუსული ზომა.



ა) 60°

ბ) 45°

გ) 30°

დ) 15°

(1) 35.

გარკვეული a , b და c ნამდვილი რიცხვებისათვის $ax^2 + bx \leq c$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $[2; 7]$ სეგმენტი. x -ის რა მნიშვნელობისათვის ღებულობს $f(x) = ax^2 + bx - 3$ ფუნქცია უმცირეს მნიშვნელობას?

ა) $x = -3$

ბ) $x = 2,5$

გ) $x = 3$

დ) $x = 4,5$

(1) 36.

იპოვეთ $f(x) = 2^{x^2-2x}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, თუ $x \in [0; 3]$.

ა) $[1; 8]$

ბ) $\left[\frac{1}{2}; 8\right]$

გ) $(0; 8]$

დ) $\{1; 8\}$

(1) 37.

იპოვეთ კონუსის მსახველის სიგრძე, თუ მისი ფუძის ფართობია 3π სმ², ხოლო გვერდითი ზედაპირის ფართობია 6π სმ².

ა) 2 სმ

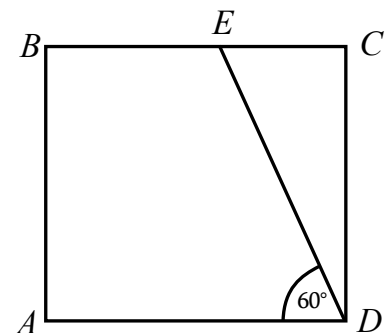
ბ) 3 სმ

გ) $2\sqrt{3}$ სმ

დ) $3\sqrt{2}$ სმ

(3) 38.

$ABCD$ კვადრატის BC გვერდზე აღებულია E წერტილი ისე, რომ $\angle ADE = 60^\circ$. იპოვეთ $ABCD$ კვადრატის ფართობი, თუ ECD სამკუთხედის ფართობი S -ის ტოლია.



(3) 39.

b_n გეომეტრიული პროგრესიის წევრები განსაზღვრულია ფორმულით

$b_n = -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. იპოვეთ ამ პროგრესიის პირველი 10 წევრის ჯამი.

(4) 40.

ორმა მორბენალმა წრიული ფორმის სარბენი ბილიკის ერთი და იმავე ადგილიდან ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებით მუდმივი სიჩქარეებით ერთდროულად დაიწყო სირბილი და პირველად ერთმანეთს 6 წუთის შემდეგ შეხვდნენ. იმავე სიჩქარეებით სირბილისას პირველი მორბენალი 5 წუთით უფრო ჩქარა შემოურბენს სარბენ ბილიკს, ვიდრე მეორე მორბენალი. რამდენ წუთში შემოურბენს სარბენ ბილიკს პირველი მორბენალი?

(4) 41.

იპოვეთ a პარამეტრის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $x^2 \leq a - 2$ და $x^2 + 4x \leq 1 - a$ უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეებს აქვს ზუსტად ერთი საერთო ელემენტი.

პასუხები

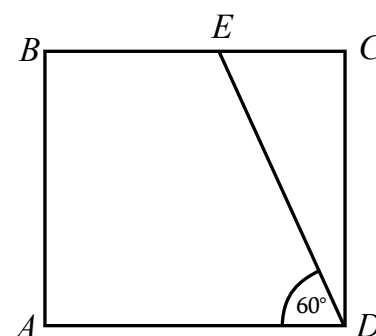
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ა	ა	ბ	ბ	დ	ბ	ა	ბ	ა	ა	ბ	ბ	დ

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
დ	ა	დ	ბ	დ	ა	ბ	ბ	დ	ბ	ბ	ა	დ

27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
დ	ბ	ბ	ბ	ბ	დ	ბ	ბ	დ	ბ	ბ

(3) 38.

$ABCD$ კვადრატის BC გვერდზე აღებულია E წერტილი ისე, რომ $\angle ADE = 60^\circ$. იპოვეთ $ABCD$ კვადრატის ფართობი, თუ ECD სამკუთხედის ფართობი S -ის ტოლია.



ამოხსნა

აღვნიშნოთ $CD = a$. მაშინ $EC = CD \cdot \operatorname{tg} \angle CDE = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $S = S_{CDE} = \frac{1}{2} CD \cdot EC = \frac{a^2}{2\sqrt{3}}$,

$$S_{ABCD} = a^2 = 2S\sqrt{3}$$

პასუხი: $S_{ABED} = 2S\sqrt{3}$.

(3) 39.

b_n გეომეტრიული პროგრესიის წევრები განსაზღვრულია ფორმულით

$b_n = -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. იპოვეთ ამ პროგრესიის პირველი 10 წევრის ჯამი.

ამოხსნა

$b_1 = -2$, ხოლო პროგრესიის მნიშვნელი ტოლია $q = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{2}{3}$.

$$S_{10} = \frac{b_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{-2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)}{\frac{1}{3}} = -6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right).$$

პასუხი: $-6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)$.

(4) 40.

ორმა მორბენალმა წრიული ფორმის სარბენი ბილიკის ერთი და იმავე ადგილიდან ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებით მუდმივი სიჩქარეებით ერთდროულად დაიწყო სირბილი და პირველად ერთმანეთს 6 წუთის შემდეგ შეხვდნენ. იმავე სიჩქარეებით სირბილისას პირველი მორბენალი 5 წუთით უფრო ჩქარა შემოუბრუნეს სარბენ ბილიკს, ვიდრე მეორე მორბენალი. რამდენ წუთში შემოუბრუნეს სარბენ ბილიკს პირველი მორბენალი?

ამოხსნა1

ვთქვათ პირველი მორბენალი სარბენ ბილიკს t წუთში შემოუბრუნეს. მაშინ მეორე მორბენალი სარბენ ბილიკს შემოუბრუნეს $t+5$ წუთში. თუ სარბენი ბილიკის სიგრძე L მეტრია, მაშინ პირველი მორბენალის სიჩქარეა $v_1 = \frac{L}{t}$, ხოლო მეორე მორბენლის სიჩქარეა $v_2 = \frac{L}{t+5}$. რადგან მორბენლები ერთმანეთს პირველად 6 წუთის შემდეგ შეხვდნენ, ამიტომ $6(v_1 + v_2) = L$, საიდანაც ვღებულობთ განტოლებას $\frac{6L}{t} + \frac{6L}{t+5} = L$. განტოლების გამარტივება გვაძლევს $t^2 - 7t - 30 = 0$. ამ

განტოლების ამონახსნია $t = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{7 \pm 13}{2}$, $t_1 = -3$, $t_2 = 10$. ფესვი $t_1 = -3$ არ შეესაბამება ამოცანის პირობას, ამიტომ, $t = 10$.

პასუხი: 10 წთ.

ამოხსნა 2

ვთქვათ პირველი მორბენალის სიჩქარეა v_1 მ/წთ, ხოლო მეორე მორბენლის - v_2 მ/წთ და ისინი ერთმანეთს 6 წუთის შემდეგ შეხვდნენ, მაშინ $6(v_1 + v_2) = L$, სადაც L - ბილიკის სიგრძეა მეტრებში. პირველი მორბენალი სარბენ ბილიკს შემოუბრუნეს $\frac{L}{v_1}$

წუთში, ხოლო ხოლო მეორე მორბენალი $\frac{L}{v_2}$ წუთში. ამიტომ $L\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) = 5$. L -ის

ჩასმა პირველი განტოლებიდან გვაძლევს $(v_1 + v_2)\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) = \frac{5}{6}$, ანუ, $\frac{v_1}{v_2} - \frac{v_2}{v_1} = \frac{5}{6}$, თუ

აღვნიშნავთ $x = \frac{v_1}{v_2}$, მივიღებთ განტოლებას $x - \frac{1}{x} = \frac{5}{6}$. ამ განტოლების ამოხსნა

გვაძლევს: $6x^2 - 5x - 6 = 0$,

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{5 \pm 13}{12}$. აქედან $\frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}$. თუ პირველი მორბენალი სარბენ ბილიკს

t წუთში, ხოლო მეორე მორბენალი $t + 5$ წუთში შემოუბრუნეს, მაშინ $\frac{t+5}{t} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}$,

საიდანაც $3t = 2t + 10$, $t = 10$.

პასუხი: 10 წთ.

ამოხსნა 3

ვთქვათ, პირველი მორბენალი სარბენ ბილიკს გაირბენს t წუთში. მაშინ მეორე მორბენალი მას გაირბენს $t+5$ წუთში. შესაბამისად, ერთ წუთში პირველი მორბენალი გაირბენს სარბენი ბილიკის სიგრძის $\frac{1}{t}$ ნაწილს, ხოლო მეორე კი $\frac{1}{t+5}$ ნაწილს. 6 წუთში პირველი მორბენალი გაირბენს სარბენ ბილიკის სიგრძის $\frac{6}{t}$ ნაწილს, ხოლო მეორე კი $\frac{6}{t+5}$ ნაწილს, რადგან ორივე მორბენალმა ერთად 6 წუთში გაირბინეს სარბენი ბილიკი სრულად, ამიტომ სამართლიანია ტოლობა: $\frac{6}{t} + \frac{6}{t+5} = 1$. განტოლების გამარტივების შედეგად, მივიღებთ $t^2 - 7t - 30 = 0$. ამ განტოლების ამონახსნია $t = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{7 \pm 13}{2}$, $t_1 = -3$, $t_2 = 10$. ფესვი $t_1 = -3$ არ შეესაბამება ამოცანის პირობას, ამიტომ, $t = 10$.

პასუხი: 10 წთ.

(4) 41.

იპოვეთ a პარამეტრის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $x^2 \leq a-2$ და $x^2+4x \leq 1-a$ უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეებს აქვს ზუსტად ერთი საერთო ელემენტი.

ამოხსნა 1

პირველ უტოლობას აქვს არაცარიელი ამონახსნთა სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a \geq 2$. თუ $a > 2$ პირველი უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $[-\sqrt{a-2}; \sqrt{a-2}]$ სეგმენტი, ხოლო თუ $a = 2$, მაშინ უტოლობას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x = 0$.

მეორე უტოლობას აქვს არაცარიელი ამონახსნთა სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც შესაბამისი კვადრატული ფუნქციის დისკრიმინანტი არაუარყოფითია. ე.ი., როდესაც $4-a+1 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 5$. ამ დროს მეორე უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $[-2-\sqrt{5-a}; -2+\sqrt{5-a}]$ სეგმენტი, თუ $a < 5$. თუ $a = 5$, მაშინ უტოლობას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x = -2$.

ამრიგად, ორივე უტოლობას აქვს ამონახსნთა არაცარიელი სიმრავლეები მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a \in [2; 5]$.

თუ $a = 2$, მეორე უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე არ შეიცავს $x = 0$ წერტილს ($-2 + \sqrt{3} < 0$), ამიტომ უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეებს არ გააჩნიათ საერთო წერტილი.

თუ $a = 5$, პირველი უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე არ შეიცავს $x = -2$ წერტილს ($-2 < -\sqrt{3}$), ამიტომ უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეებს არ გააჩნიათ საერთო წერტილი.

შევნიშნოთ, რომ $-2 - \sqrt{5-a} \neq \sqrt{a-2}$ ყოველი $a \in (2; 5)$ -სთვის.

მაშასადამე, საწყისი უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეებს ექნებათ ერთადერთი საერთო წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $-2 + \sqrt{5-a} = -\sqrt{a-2}$.

$$2 = \sqrt{5-a} + \sqrt{a-2} \Leftrightarrow 4 = 5-a+a-2 + 2\sqrt{-a^2+7a-10} \Leftrightarrow 4(-a^2+7a-10) = 1 \Leftrightarrow$$

$$4a^2 - 28a + 41 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{2} - \sqrt{2}; a_2 = \frac{7}{2} + \sqrt{2}.$$

ორივე რიცხვი: $\frac{7}{2} - \sqrt{2}$ და $\frac{7}{2} + \sqrt{2}$ ეკუთვნის $(2; 5)$ ინტერვალს, ამიტომ ორივე რიცხვი აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას.

პასუხი: $a_1 = \frac{7}{2} - \sqrt{2}; a_2 = \frac{7}{2} + \sqrt{2}.$

ამოხსნა 2

შევნიშნოთ, რომ $x^2 \leq a-2$ და $x^2 + 4x \leq 1-a$ უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეებს აქვს ზუსტად ერთი საერთო ელემენტი შემდეგ შემთხვევებში:

ა) $x^2 \leq a-2$ უტოლობას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც არის $x^2 + 4x \leq 1-a$ უტოლობის ამონახსნიც. ამ შემთხვევაში გვექნება $a-2=0 \Rightarrow a=2$. შესაბამისად პირველი უტოლობის ამონახსნია $x=0$, რომელიც არ აკმაყოფილებს მეორე უტოლობას.

ბ) $x^2 + 4x \leq 1-a$ უტოლობას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც არის $x^2 \leq a-2$ უტოლობის ამონახსნიც. ამ შემთხვევაში გვექნება $20-4a=0 \Rightarrow a=5$. შესაბამისად პირველი უტოლობის ამონახსნია $x=-2$, რომელიც არ აკმაყოფილებს მეორე უტოლობას.

გ) $x^2 \leq a-2$ და $x^2 + 4x \leq 1-a$ უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეებია სეგმენტები, რომლებსაც აქვს ერთადერთი საერთო წერტილი. ეს მოხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x^2 = a-2$ და $x^2 + 4x + a - 1 = 0$ განტოლებებს აქვს ერთი საერთო ფესვი, ხოლო დანარჩენი ფესვები საკოორდინატო ღერძზე ამ საერთო ფესვის სხვადასხვა მხარესაა. ვთქვათ საერთო ფესვია x_0 . მაშინ $x_0^2 = a-2$ და $x_0^2 + 4x_0 + a - 1 = 0$, საიდანაც $a-2+4x_0+a-1=0 \Rightarrow x_0 = \frac{3-2a}{4}$. ჩავსვათ მიღებული

პირველ	განტოლებაში.	გვექნება
$\left(\frac{3-2a}{4}\right)^2 = a-2 \Rightarrow 4a^2 - 28a + 41 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{2} - \sqrt{2}; a_2 = \frac{7}{2} + \sqrt{2}.$		
შესაბამისად		

$x_0 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ან $x_0 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. შევნიშნოთ, რომ x_0 -ის ორივე მიღებული მნიშვნელობა -2 ზე მეტი უარყოფითი რიცხვია, ამიტომ $x^2 = a-2$ განტოლების მეორე ფესვი დადებითი იქნება, ხოლო $x^2 + 4x + a - 1 = 0$ განტოლების მეორე ფესვი იქნება $-\frac{4}{2}$ - ზე ნაკლები (ფესვები მდებარეობს წვეროს აბსცისის სხვადასხვა მხარეს) და ამიტომ ნაკლები იქნება x_0 -ზეც.

ამრიგად, როდესაც $a = \frac{7}{2} - \sqrt{2}$ ან $a = \frac{7}{2} + \sqrt{2}$, მაშინ $x^2 + 2 \leq a$ და $x^2 + 4x \leq 1-a$

უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეები სეგმენტებია, რომლებსაც აქვს ზუსტად ერთი საერთო ელემენტი.

პასუხი: $a = \frac{7}{2} - \sqrt{2}$ ან $a = \frac{7}{2} + \sqrt{2}$.