

პედაგოგის კომპეტენციის დასადასტურებელი გამოცდა მათემატიკაში
2025 წელი დეკემბერი

პასუხები

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ბ	ა	ა	გ	ბ	გ	დ	ბ	დ	ბ	დ	გ

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
ა	ბ	ბ	ა	დ	დ	ა	დ	ა	გ	გ	დ

ქვემოთ თითოეული დავალებისათვის ნიმუშად წარმოდგენილია ერთ-ერთი შესაძლო პასუხი, რომელიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება.

(7) 25

(3) დაამტკიცეთ იგივეობა: $\frac{\sin(2x) + \sin(4x)}{1 + \cos(2x) + \cos(4x)} = \operatorname{tg}(2x)$, თუ $\cos(2x) \neq 0$ და $\cos(2x) \neq -\frac{1}{2}$.

(4) იპოვეთ $3\sin^2 x - \cos(2x) = \frac{1}{2} + \cos x \cdot \sin x \cdot \operatorname{ctg} x$ განტოლების ყველა ის ამონახსნი, რომლებიც მოთავსებულია $[-\pi; \pi]$ შუალედში.

(3) 1.

ამოხსნა

ორმაგი კუთხის სინუსის და კოსინუსის გამოსათვლელი ფორმულების თანახმად გვაქვს: $\sin(2x) + \sin(4x) = \sin(2x)(1 + 2\cos(2x))$ და

$1 + \cos(2x) + \cos(4x) = \cos(2x) + 2\cos^2(2x) = \cos(2x)(1 + 2\cos(2x))$. რადგან $\cos(2x) \neq 0$

და $\cos(2x) \neq -\frac{1}{2}$ იგივეობის მარცხენა მხარე ტოლია:

$$\frac{\sin(2x) + \sin(4x)}{1 + \cos(2x) + \cos(4x)} = \frac{\sin(2x)(1 + 2\cos(2x))}{\cos(2x)(1 + 2\cos(2x))} = \operatorname{tg}(2x).$$

ამოხსნის ეტაპები

ა) მრიცხველი ნარმოადგინა ნამრავლად $\sin(2x) + \sin(4x) = \sin(2x)(1 + 2\cos(2x))$;

ბ) მნიშვნელი ნარმოადგინა ნამრავლად $1 + \cos(2x) + \cos(4x) = \cos(2x)(1 + 2\cos(2x))$;

გ) გააკეთა სწორი დასკვნა.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა; ან ბ.

2 ქულა - ა, ბ.

3 ქულა - ა, ბ, გ.

(4) 2.

ამოხსნა

$$3\sin^2 x - \cos(2x) = \frac{1}{2} + \cos x \cdot \sin x \cdot \operatorname{ctg} x \Rightarrow 3\sin^2 x - 1 + 2\sin^2 x = \frac{1}{2} + \cos^2 x$$

$$5\sin^2 x - 1 = \frac{3}{2} - \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{5}{12}. \text{ ამ უკანასკნელი განტოლებიდან მივიღებთ:}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{15}}{6} \text{ და } \sin x = -\frac{\sqrt{15}}{6}.$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{15}}{6} \text{ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა } x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{6} \text{ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა } x = (-1)^{k+1} \arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{15}}{6} \text{ განტოლებას } [-\pi; \pi] \text{ შუალედში გააჩნია ორი ამონახსნი: } \arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)$$

$$\text{და } \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right).$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{6} \text{ განტოლებას } [-\pi; \pi] \text{ შუალედში ასევე გააჩნია ორი ამონახსნი:}$$

$$-\arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right) \text{ და } \arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right) - \pi.$$

$$\text{პასუხი: } \arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right), \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right), -\arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right) \text{ და } \arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right) - \pi.$$

ამოხსნის ეტაპები

ა) გამარტივების შედეგად მიიღო მხოლოდ x არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შემცველი განტოლება (მაგ., $3\sin^2 x - 1 + 2\sin^2 x = \frac{1}{2} + \cos^2 x \cdot \sin x$);

ბ) მიიღო უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლება $\sin^2 x = \frac{5}{12}$ ან $\cos^2 x = \frac{7}{12}$;

გ) იპოვა ორი ამონახსნი $[-\pi; \pi]$ შუალედიდან;

დ) იპოვა ოთხივე ამონახსნი $[-\pi; \pi]$ შუალედიდან.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა.

2 ქულა - ა, ბ.

3 ქულა - ა, ბ, გ.

4 ქულა - ა, ბ, დ.

(5) 26.

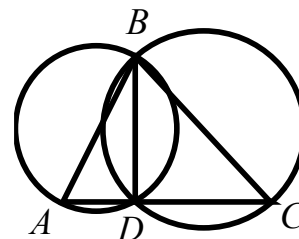
ABC მახვილკუთხა სამკუთხედის AB და BC გვერდებზე, როგორც დიამეტრებზე, აგებული წრეწირები ერთმანეთს კვეთს B და D წერტილებში. იპოვეთ ABC კუთხის სიდიდე, თუ $\angle BAC = 60^\circ$, ხოლო $AD : DC = 2 : 3$.

ამოხსნა:

პირობის თანახმად AB წრეწირის დიამეტრია, ამიტომ $\angle ADB = 90^\circ$, ანალოგიურად $\angle BDC = 90^\circ$, ე.ი. D

წერტილი მდებარეობს AC გვერდზე.

ABD მართკუთხა სამკუთხედში $AD = \frac{BD}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{BD}{\sqrt{3}}$, ხოლო



$AB = BD \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} BD$, რადგან პირობის თანახმად $AD : DC = 2 : 3$, მაშინ

$$DC = \frac{3}{2} AD = \frac{3BD}{2\sqrt{3}}, \quad AC = AD + DC = \frac{BD}{\sqrt{3}} + \frac{3BD}{2\sqrt{3}} = \frac{5BD}{2\sqrt{3}}.$$

BDC მართკუთხა სამკუთხედში პითაგორას თეორემის

$$\text{თანახმად } BC = \sqrt{DC^2 + BD^2} = \frac{\sqrt{7}}{2} BD.$$

ABC სამკუთხედში სინუსების თეორემის გამოყენებით ვღებულობთ:

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{AC}{\sin(\angle ABC)} \Leftrightarrow \sin(\angle ABC) = \frac{\frac{5BD}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2} BD} = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

$$\text{ე.ი. } \angle ABC = \arcsin \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

$$\text{პასუხი: } \angle ABC = \arcsin \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაწერა $\angle ADB = 90^\circ$ და $\angle BDC = 90^\circ$;

ბ) ABD სამკუთხედის ერთ-ერთი გვერდი გამოსახა მახვილი კუთხისა და ამავე სამკუთხედის რომელიმე სხვა გვერდის საშუალებით;

გ) AD და DC მონაკვეთები გამოსახა ABD სამკუთხედის მახვილი კუთხისა და ამ სამკუთხედის ერთსა და იმავე გვერდის საშუალებით (მაგ. $AD = \frac{BD}{\sqrt{3}}$, $DC = \frac{3BD}{2\sqrt{3}}$);

დ) ABC კუთხის სიდიდის დასადგენად დაწერა გამოსახულება, საიდანაც შესაძლებელია საძიებელი კუთხის მნიშვნელობის პოვნა ან იპოვა CBD კუთხის

ტანგენსი: $\operatorname{tg}(\angle CBD) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ე) პასუხი (მაგ. $\angle ABC = \frac{\pi}{6} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$ ან $\angle ABC = \arcsin \frac{5\sqrt{7}}{14}$).

შეფასების სქემა

1 ქულა: ა.

2 ქულა: ა, ბ.

3 ქულა: ა, ბ, გ.

4 ქულა: ა, ბ, გ, დ.

5 ქულა: ა, ბ, გ, დ, ე.

(5) 27. ამოხსენით უტოლობა: $\log_3(x^2 - 5x - 6) \leq \log_3(x + 3) + 1$.

ამოხსნა

x ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე წარმოადგენს $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$

უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეს.

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (6; +\infty) \\ x \in (-3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3; -1) \cup (6; +\infty).$$

$\log_3(x^2 - 5x - 6) \leq \log_3(x + 3) + 1 \Rightarrow \log_3(x^2 - 5x - 6) \leq \log_3(3x + 9)$. რადგან ლოგარითმული ფუნქცია ზრდადია, როდესაც ფუძე მეტია 1-ზე, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობიდან ვღებულობთ $x^2 - 5x - 6 \leq 3x + 9$ უტოლობას, რომელიც ტოლფასია $x^2 - 8x - 15 \leq 0$ უტოლობის. მიღებული უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $[4 - \sqrt{31}; 4 + \sqrt{31}]$. ამ უკანასკნელის თანაკვეთა $(-3; -1) \cup (6; +\infty)$ სიმრავლესთან გვაძლევს თავდაპირველი უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეს.

პასუხი: $[4 - \sqrt{31}; -1) \cup (6; 4 + \sqrt{31}]$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) იპოვა $x^2 - 5x - 6 > 0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე; ან იპოვა $x + 3 > 0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე; ან შეადგინა უტოლობათა სისტემა

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases};$$

ბ) დაადგინა x ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე:

$$x \in (-3; -1) \cup (6; +\infty);$$

გ) მიიღო $x^2 - 8x - 15 \leq 0$ უტოლობა ან მისი ტოლფასი კვადრატული უტოლობა; ან

$$\text{შეადგინა სისტემა } \begin{cases} x^2 - 5x - 6 > 0 \\ x^2 - 8x - 15 \leq 0 \end{cases}.$$

დ) იპოვა $x^2 - 8x - 15 \leq 0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე $[4 - \sqrt{31}; 4 + \sqrt{31}]$;

ე) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა: ა.

2 ქულა: ბ; ან გ.

3 ქულა: ბ, გ; ან ა, გ.

4 ქულა: ბ, გ, დ.

5 ქულა: ბ, გ, დ, ე.