ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში

2024-25 სასწავლო წელი

III ტური X კლასი

Задача 1 **5 баллов**

Найдите все тройки целых чисел $(x;\, y;\, z)$, удовлетворяющие равенству $x^2\left(1-y^2\right)+y^2+z^2=0$.

Задача 2 **5 баллов**

Положительные числа x и y удовлетворяют равенствам: $x^n=x+1$ и $y^{2n}-y=3x$, где n фиксированное натуральное число и $n>1$. Найдите наименьшее из чисел x и y.

Задача 3 **5 баллов**

В координатной плоскости Oxy проведен луч OA, образующий с положительной полуосью абсцисс острый угол величины α. Внутри этого острого угла берется точка $M(a;\, b)$, где a и b положительные числа. Вычислить наибольшее возможное значение суммы $\dfrac{1}{ML}+\dfrac{1}{MK}$, где точки L и K являются точками пересечения прямой, проходящей через точку M с лучом OA и положительной полуосью абсцисс соответственно.

Задача 4 **5 баллов**

На полуокружности с центром O и диаметром AB взяты точки C и D так, чтобы точка D лежала на дуге BC. Точки M, P и N представляют собой середины хорд AC, CD и DB соответственно. Центрами окружностей, описанных около треугольников ACP и BDP, являются точки O_1 и O_2 соответственно. Докажите что $MN \| O_1O_2$.

Задача 5 **5 баллов**

Функция $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ определенное на множестве неотрицательных целых чисел, обладает свойством: если $|x-y| \in \{5;\, 7;\, 12\}$, то $f(x) \neq f(y)$. Какое наименьшее число элементов может содержать множество значений функции с этим свойством?