

ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადის მათემატიკაში

2024-25 სასწავლო წელი

III ტური X კლასი

ამოცანა 1

5 ქულა

იპოვეთ მთელ რიცხვთა ყველა სამეული $(x; y; z)$, რომლებიც აკმაყოფილებენ ტოლობას $x^2(1-y^2) + y^2 + z^2 = 0$.

ამოცანა 2

5 ქულა

x და y დადებითი რიცხვები აკმაყოფილებენ ტოლობებს: $x^n = x+1$ და $y^{2n} - y = 3x$, სადაც n ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია და $n > 1$. იპოვეთ x და y რიცხვებს შორის უმცირესი.

ამოცანა 3

5 ქულა

Oxy საკოორდინატო სისტემაში გავლებულია OA სხივი, რომელიც აბსცისათა დადებით ნახევარღერძთან ქმნის α სიდიდის მახვილ კუთხეს. ამ მახვილი კუთხის შიგნით აღებულია $M(a; b)$ წერტილი, სადაც a და b მოცემული დადებითი რიცხვებია.

გამოთვალეთ $\frac{1}{ML} + \frac{1}{MK}$ ჯამის შესაძლო უდიდესი მნიშვნელობა, სადაც L და K წერტილები შესაბამისად არის M წერტილზე გამავალი წრფის გადაკვეთის წერტილები OA სხივთან და აბსცისათა დადებით ნახევარღერძთან.

ამოცანა 4

5 ქულა

O ცენტის და AB დიამეტრის მქონე ნახევარწრეწირზე აღებულია C და D წერტილები ისე, რომ D წერტილი მდებარეობს BC რკალზე. M, P და N წერტილები შესაბამისად წარმოადგენენ AC, CD და DB ქორდების შუაწერტილებს. ACP და BDP სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირების ცენტრები არის შესაბამისად O_1 და O_2 წერტილები. დაამტკიცეთ, რომ $MN \parallel O_1O_2$.

ამოცანა 5

5 ქულა

$f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ არის არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია თვისება: თუ $|x - y| \in \{5; 7; 12\}$, მაშინ $f(x) \neq f(y)$. ელემენტების რა უმცირეს რაოდენობას შეიძლება შეიცავდეს ამ თვისების მქონე ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე?