

ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში
2024-25 სასწავლო წელი
III ტური XI-XII კლასი

ამოცანა 1

5 ქულა

$f: R \rightarrow R$ ფუნქცია ყოველი ნამდვილი x და y რიცხვებისთვის აკმაყოფილებს განტოლებას $f(x+|y|)+|y|=f(f(f(x)))$. ამავე დროს $f(0)=15$. გამოთვალეთ ჯამი

$$f(-1)+f(-2)+f(-3)+\dots+f(-50).$$

ამოცანა 2

5 ქულა

ვთქვათ m და n არიან ნატურალური რიცხვები, რომელთა უდიდესი საერთო გამყოფი არის 1-ის ტოლი (ანუ m და n რიცხვები ურთიერთმარტივია). $d(m,n)$ -ით აღვნიშნოთ $2025m+n$ და $2025n+m$ რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი. იპოვეთ $d(m,n)$ -ის უდიდესი შესაძლო მნიშვნელობა. პასუხი დაასაბუთეთ.

ამოცანა 3

5 ქულა

გიორგიმ დახაზა 2025 უჯრისაგან შედგენილი ცხრილი და თითოეულ უჯრაში ჩაწერა რიცხვი 2^{2025} . ამის შემდეგ მან ხელოვნურ ინტელექტს დაუსვა ამოცანა: თითოეულ უჯრაში ჩაწერილი 2^{2025} შეეცვალა ისეთი 2^k სახის რიცხვით, რომ ყველა k ყოფილიყო ერთმანეთისაგან განსხვავებული არაუარყოფითი მთელი ხარისხის მაჩვენებელი და ყველა უჯრაში მიღებული რიცხვების ჯამი ზუსტად 2025-ით ნაკლები ყოფილიყო ყველა უჯრაში თავდაპირველად ჩაწერილი რიცხვების ჯამზე. არის თუ არა ეს შესაძლებელი? პასუხი დაასაბუთეთ.

ამოცანა 4

5 ქულა

$ABCD$ ამოზნექილ ოთხკუთხედში $AB > AD$ და $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. M წერტილი აღებულია AB გვერდზე ისე, რომ $AM = AD$. MD და BC წრფეები იკვეთება K წერტილში. K წერტილიდან AC წრფისადმი მართობულად გავლებული წრფე AB წრფეს კვეთს X წერტილში. ვთქვათ N წერტილი არის D წერტილიდან AC წრფეზე დაშვებული მართობის ფუძე. დაამტკიცეთ, რომ $\angle MNK = \angle MCX$.

ამოცანა 5

5 ქულა

ABC მახვილკუთხა სამკუთხედის AC და BC გვერდებზე აღებულია შესაბამისად D და K წერტილები ისე, რომ DK წრფე პარალელურია AB წრფის. AD და CK მონაკვეთებზე აღებულია შესაბამისად E და F წერტილები. EF წრფე DK მონაკვეთს კვეთს M წერტილში, ხოლო AB წრფეს კვეთს N წერტილში. ცნობილია, რომ $\angle CAF = \angle CBE$ და ABM სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი გადის EF მონაკვეთის შუაწერტილზე, რომელიც განსხვავებულია M წერტილისაგან. დაამტკიცეთ, რომ KDN სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი ასევე გადის EF მონაკვეთის შუაწერტილზე.