ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში
2024-25 სასწავლო წელი
III ტური XI-XII კლასი

ამოცანა 1 **5 ქულა**

$f: R \to R$ ფუნქცია ყოველი ნამდვილი x და y რიცხვებისთვის აკმაყოფილებს განტოლებას $f\left(x+|y|\right)+|y| = f(f(f(x)))$. ამავე დროს $f(0)=15$. გამოთვალეთ ჯამი

$$f(-1)+f(-2)+f(-3)+...+f(-50).$$

ამოხსნა

ჩავსვათ განტოლებაში $y=0$. მივიღებთ $f(x)=f(f(f(x)))$ ყოველი ნამდვილი x რიცხვისთვის. ჩავსვათ განტოლებაში $y=x$, სადაც $x<0$. მივიღებთ $f(0)-x=f(f(f(x)))$ ყოველი უარყოფითი x რიცხვისთვის. $f(x)=f(f(f(x)))$ ტოლობის გათვალისწინებით უკანასკნელი განტოლება მიიღებს სახეს $f(0)-x=f(x)$, სადაც . $f(0)=15$ პირობის გათვალისწინებით გვექნება $f(x)=15-x$. ამიტომ
$f(-1)+f(-2)+f(-3)+...+f(-50)=15\cdot 50+1+2+...+50=750+1275=2025$.

პასუხი: 2025.

ამოცანა 2 **5 ქულა**

ვთქვათ m და n არიან ნატურალური რიცხვები, რომელთა უდიდესი საერთო გამყოფი არის 1-ის ტოლი (ანუ m და n რიცხვები ურთიერთმარტივია). $d(m,n)$-ით აღვნიშნოთ $2025m+n$ და $2025n+m$ რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი. იპოვეთ $d(m,n)$-ის უდიდესი შესაძლო მნიშვნელობა. პასუხი დაასაბუთეთ.

ამოხსნა

ვთქვათ m და n რიცხვები ურთიერთმარტივია. ვინაიდან $d(m,n)$ ყოფს $2025m+n$ და $2025n+m$ რიცხვებს, ამიტომ $d(m,n)$ გაყოფს ამ რიცხვების ჯამსაც და სხვაობასაც, ანუ $d(m,n)$ ყოფს რიცხვებს $a=2026(m+n)$ და $b=2024(m-n)$. მაშინ $d(m,n)$ გაყოფს რიცხვებს $2024a+2026b=2m(2025^2-1)$ და $2024a-2026b=2n(2025^2-1)$. ვინაიდან m და n რიცხვები ურთიერთმარტივია, ამიტომ $d(m,n)$ ყოფს რიცხვს $2(2025^2-1)$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $d(m,n)$ არ შეიძლება უდრიდეს $2(2025^2-1)$-ს. მართლაც, ვთქვათ $d(m,n)=2(2025^2-1)$. მაშინ $2025m+n=2(2025^2-1)k$ და $2025n+m=2(2025^2-1)s$, სადაც k და s უნდა იყოს ურთიერთმარტივი რიცხვები. მაშინ მივიღებთ, რომ $m=2(2025k-s)$ და $n=2(2025s-k)$. ეს კი ეწინააღმდეგება იმას, რომ m და n რიცხვები ურთიერთმარტივია. ამრიგად $d(m,n)\le 2025^2-1$. ვაჩვენოთ, რომ $d(m,n)=2025^2-1$ შესაძლებელია. მართლაც, ავიღოთ $m=2025\cdot 2024-1$ და $n=1$. მაშინ $2025m+n=2024\cdot(2025^2-1)$ და $2025n+m=2025^2-1$. ამ რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი მართლაც არის $d(m,n)=2025^2-1$.

პასუხი: 2025^2-1

ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში
2024-25 სასწავლო წელი
III ტური XI-XII კლასი

ამოცანა 3 **5 ქულა**

გიორგიმ დახაზა 2025 უჯრისაგან შედგენილი ცხრილი და თითოეულ უჯრაში ჩაწერა რიცხვი 2^{2025}. ამის შემდეგ მან ხელოვნურ ინტელექტს დაუსვა ამოცანა: თითოეულ უჯრაში ჩაწერილი 2^{2025} შეეცვალა ისეთი 2^k სახის რიცხვით, რომ ყველა k ყოფილიყო ერთმანეთისაგან განსხვავებული არაუარყოფითი მთელი ხარისხის მაჩვენებელი და ყველა უჯრაში მიღებული რიცხვების ჯამი ზუსტად 2025-ით ნაკლები ყოფილიყო ყველა უჯრაში თავდაპირველად ჩაწერილი რიცხვების ჯამზე. არის თუ არა ეს შესაძლებელი? პასუხი დაასაბუთეთ.

ამოხსნა

ცხრილში თავდაპირველად ჩაწერილი რიცხვების არის $2025\cdot 2^{2025}$.
დავასაბუთოთ, რომ $2025\cdot 2^{2025}-2025$ წარმოდგინდება 2^k სახის რიცხვების ჯამით ისე, რომ ყველა k იქნება ერთმანეთისაგან განსხვავებული არაუარყოფითი მთელი რიცხვი და მათი რაოდენობა იქნება ზუსტად 2025. მართლაც,

$$2025\cdot 2^{2025}-2025=2024\cdot 2^{2025}+(2^{2025}-1)-2024=(2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^3)\cdot 2^{2025}+$$
$$+(2^{2024}+2^{2023}+\ldots+2^2+2^1+2^0)-(2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^3)=$$
$$=(2^{2035}+2^{2034}+2^{2033}+2^{2032}+2^{2031}+2^{2030}+2^{2028})+(2^{2024}+2^{2023}+\ldots+2^{12}+2^{11})+(2^4+2^2+2^1+2^0).$$

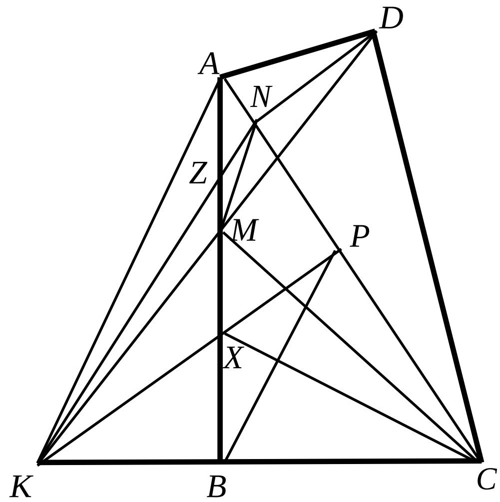
ამრიგად, მიღებული გამოსახულებიდან ჩანს, რომ პირველ ფრჩხილებში მოქცეული შესაკრებების რაოდენობა არის 7, მეორე ფრჩხილებში მოქცეული შესაკრებების რაოდენობა არის 2014, ხოლო მესამე ფრჩხილებში მოქცეული შესაკრებების რაოდენობა არის 4. ასე, რომ სულ გვაქვს 2025 შესაკრები.

პასუხი: შესაძლებელია.

ამოცანა 4 **5 ქულა**

$ABCD$ ამოზნექილ ოთხკუთხედში $AB > AD$ და $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. M წერტილი აღებულია AB გვერდზე ისე, რომ $AM = AD$. MD და BC წრფეები იკვეთება K წერტილში. K წერტილიდან AC წრფისადმი მართობულად გავლებული წრფე AB წრფეს კვეთს X წერტილში. ვთქვათ N წერტილი არის D წერტილიდან AC წრფეზე დაშვებული მართობის ფუძე. დაამტკიცეთ, რომ $\angle MNK = \angle MCX$.

ამოხსნა



ვთქვათ K წერტილიდან AC წრფისადმი მართობულად გავლებული წრფე AC წრფეს კვეთს P წერტილში. გვაქვს

$\angle KDC = 90° - \angle ADM = 90° - \angle KMB = \angle MKB = \angle DKC$,

ამიტომ $DC = KC$.

შევნიშნოთ, რომ ADC მართკუთხა სამკუთხედში $DN \perp AC$, ამიტომ $AM^2 = AD^2 = AN \cdot AC$. მაშასადამე ΔANM მსგავსია ΔAMC-ის, საიდანაც ვიღებთ, რომ $\angle AMN = \angle ACM$.

ანალოგიურად გვექნება, $CK^2 = CD^2 = CN \cdot CA$, ამიტომ ΔCNK მსგავსია ΔCKA-ის, საიდანაც ვიღებთ, რომ $\angle CKN = \angle CAK$.

შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $\angle KBA = \angle KPA = 90°$, ამიტომ $KAPB$ ოთხკუთხედზე წრეწირი შემოიხაზება, საიდანაც ვიღებთ, რომ $\angle CAK = \angle CBP$. ამრიგად $\angle CKN = \angle CAK = \angle CBP$, ე. ი. KN და BP წრფეები პარალელურია, საიდანაც $\angle AZN = \angle ABP$. $XBCP$ ოთხკუთხედის ციკლურობის გამო $\angle XBP = \angle XCP$. ამრიგად, გვაქვს

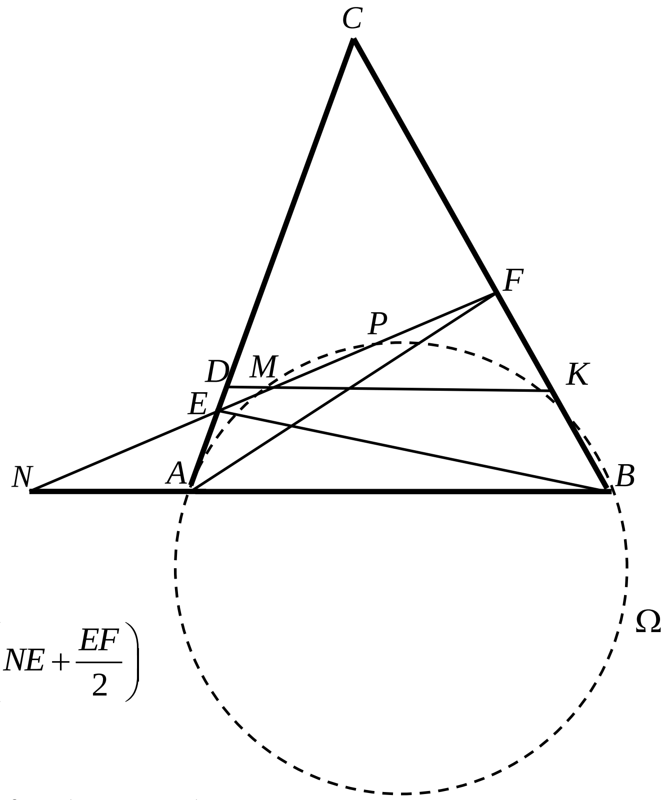
$\angle MNK = \angle AZN - \angle AMN = \angle ABP - \angle ACM = \angle XBP - \angle ACM = \angle XCP - \angle ACM = \angle XCM$. რ.დ.გ.

ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში
2024-25 სასწავლო წელი
III ტური XI-XII კლასი

ამოცანა 5 — 5 ქულა

ABC მახვილკუთხა სამკუთხედის AC და BC გვერდებზე აღებულია შესაბამისად D და K წერტილები ისე, რომ DK წრფე პარალელურია AB წრფის. AD და CK მონაკვეთებზე აღებულია შესაბამისად E და F წერტილები. EF წრფე DK მონაკვეთს კვეთს M წერტილში, ხოლო AB წრფეს კვეთს N წერტილში. ცნობილია, რომ $\angle CAF = \angle CBE$ და ABM სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი გადის EF მონაკვეთის შუაწერტილზე, რომელიც განსხვავებულია M წერტილისაგან. დაამტკიცეთ, რომ KDN სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი ასევე გადის EF მონაკვეთის შუაწერტილზე.

ამოხსნა



ვთქვათ EF მონაკვეთის შუაწერტილი არის P და A, M, P, B წერტილები ციკლურია, ანუ ეს წერტილები მდებარეობენ წრეწირზე. უნდა დავამტკიცოთ, რომ N, D, P, K წერტილებიც ციკლურია, ამისათვის კი საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $NM \cdot MP = DM \cdot MK$.
ვინაიდან პირობის თანახმად $\angle CAF = \angle CBE$, ამიტომ A, E, F, B წერტილები ციკლურია, რის გამოც გვექნება $NA \cdot NB = NE \cdot NF$.
A, M, P, B წერტილების ციკლურობის გამო გვექნება $NA \cdot NB = NM \cdot NP$. ამრიგად, მიღებული ორი ტოლობის გამო გვექნება:

$$NE \cdot NF = NM \cdot NP \;\Leftrightarrow\; NE \cdot \left(NE + EF\right) = \left(NE + EM\right)\left(NE + \frac{EF}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad NE = \frac{EF \cdot EM}{EF - 2EM}.$$

შევნიშნოთ, რომ $\angle EFK = \angle EFB = 180^\circ - \angle EAB = 180^\circ - \angle CDK = \angle EDK$,
ამიტომ $KFDE$ ოთხკუთხედი ციკლურია, საიდანაც $DM \cdot MK = EM \cdot MF$. ამრიგად,

$$DM \cdot MK = EM \cdot MF = \left(NM - NE\right)\left(MP + \frac{EF}{2}\right) = NM \cdot MP - NE \cdot MP + NM \cdot \frac{EF}{2} - NE \cdot \frac{EF}{2} =$$

$$= NM \cdot MP - NE \cdot \left(\frac{EF}{2} - EM\right) + \left(NE + EM\right) \cdot \frac{EF}{2} - NE \cdot \frac{EF}{2} = NM \cdot MP + NE \cdot EM + EM \cdot \frac{EF}{2} - NE \cdot \frac{EF}{2} =$$

$$= NM \cdot MP + NE \cdot \frac{2EM - EF}{2} + EM \cdot \frac{EF}{2} = NM \cdot MP + \frac{EF \cdot EM}{EF - 2EM} \cdot \frac{2EM - EF}{2} + EM \cdot \frac{EF}{2} = NM \cdot MP.$$

რ.დ.გ.