

საგნის გამოცდა მათემატიკაში (საბაზო ან/და საშუალო საფეხური)

2025 წელი

პასუხები

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ბ	დ	ბ	ბ	ბ	ბ	დ	ბ	დ	ა	ბ	დ

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
ბ	ა	ა	ბ	დ	ა	ა	ბ	ბ	ა	დ	ბ

ქვემოთ თითოეული დავალებისათვის ნიმუშად წარმოდგენილია ერთ-ერთი შესაძლო პასუხი, რომელიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება.

(7) 25

(3) განმარტეთ არითმეტიკული პროგრესია და გამოიყვანეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა.

(4) $a_1, a_2, \dots, a_{21}$ რიცხვითი მიმდევრობის ყოველი წევრი (გარდა კიდურა წევრებისა) წარმოადგენს მისი წინა და მომდევნო წევრის საშუალო არითმეტიკულს. იპოვეთ ამ რიცხვითი მიმდევრობის მეცამეტე წევრი, თუ ცნობილია, რომ $a_1 = 3$ და $a_{21} = 22$.

ამოხსნა

1) რიცხვთა მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი, მეორედან დაწყებული, მიიღება წინა წევრისაგან ერთი და იმავე d რიცხვის მიმატებით, ეწოდება არითმეტიკული პროგრესია. d რიცხვს ეწოდება არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა.

არითმეტიკული პროგრესიის განმარტებიდან უშუალოდ მიიღება მისი k -ური წევრის გამოსათვლელი ფორმულა: $a_k = a_1 + d(k-1)$.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს არითმეტიკული პროგრესია: $a_1, a_2, \dots, a_n$, რომლის სხვაობაა d .

S_n -ით აღვნიშნოთ $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ჯამი. არითმეტიკულ პროგრესიაში ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებული წევრების ჯამი ტოლია ამ პროგრესიის კიდურა წევრების ჯამის.

ე.ი. $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$, $k = 1, 2, \dots, n$.

მართლაც, $a_k + a_{n-k+1} = [a_1 + d(k-1)] + [a_1 + d(n-k)] = a_1 + [a_1 + d(n-1)] = a_1 + a_n$.

S_n ჯამი წარმოვადგინოთ ორგვარად: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ და $S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$ სახით.

თუ ამ უკანასკნელ ორ ტოლობას შევკრებთ და გავითვალისწინებთ ზემოთ აღწერილ

თვისებას, მივიღებთ:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n), \quad \text{საიდანაც} \quad \text{ვღებულობთ}$$

არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის გამოსათვლელ ფორმულას:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \quad \text{თუ გავითვალისწინებთ არითმეტიკული პროგრესიის } n\text{-ური წევრის}$$

ფორმულას, მივიღებთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის

$$\text{გამოსათვლელ მეორე ფორმულას: } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

ამოხსნის ეტაპები

- ა) განსაზღვრა არითმეტიკული პროგრესია.
- ბ) დაწერა არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა, ან მიუთითა $a_k + a_{n-k} = a_1 + a_n$, $k = 1, 2, \dots, n$ თვისება.
- გ) არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის გამოსათვლელი რომელიმე ფორმულის გამოყენება.

შეფასების სქემა

1 ქულა: ა; ან ბ.

2 ქულა: ა, ბ; ან გ.

3 ქულა: ა, გ.

(4) 2.

ამოხსნა

ამოცანის პირობის თანახმად $a_k = \frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2}$, $k = 2, 3, \dots, 20$. ეს ტოლობები ტოლფასია

$a_{k+1} - a_k = a_k - a_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots, 20$ ტოლობების, საიდანაც დავასკვნით, რომ აღნიშნული მიმდევრობა წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას.

მაშინ, $a_{21} = a_1 + 20d \Rightarrow d = \frac{a_{21} - a_1}{20} = \frac{22 - 3}{20} = \frac{19}{20}$.

$a_{13} = a_1 + 12d = 3 + \frac{12 \cdot 19}{20} = \frac{72}{5}$.

პასუხი: $\frac{72}{5}$.

ამოხსნის ეტაპები

- ა) მიიღო $a_{k+1} - a_k = a_k - a_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots, 20$ ტოლობები.
- ბ) დაადგინა, რომ მოცემული რიცხვითი მიმდევრობა წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას.
- გ) გამოთვალა რიცხვითი მიმდევრობის სხვაობა.
- დ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა: ა.

2 ქულა: ა, ბ.

3 ქულა: ა, ბ, გ.

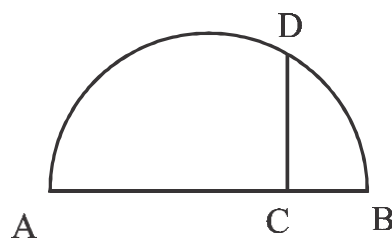
4 ქულა: ა, ბ, გ, დ.

შენიშვნა: 1) თუ დასაბუთების გარეშე მიიჩნია, რომ მოცემული მიმდევრობა წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას და ამ დაშვებით იპოვა პროგრესიის სხვაობა, ნაშრომი შეფასდეს 1 ქულით.

2) თუ დასაბუთების გარეშე მიიჩნია, რომ მოცემული მიმდევრობა წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას და ამ დაშვებით იპოვა პროგრესიის სხვაობა და მიმდევრობის მეცამეტე წევრი, მაშინ ნაშრომი შეფასდეს 2 ქულით.

(5) 26.

ნახევარწრეწირის AB დიამეტრის C წერტილიდან აღმართულია მართობი, რომელიც ნახევარწრეწირს D წერტილში კვეთს (იხილეთ სურათი). იპოვეთ BC , CD მონაკვეთებითა და BD რკალის შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი, თუ $AC = 6$, $CB = 2$.



ამოხსნა:

სამიეხელი DCB ფიგურის ფართობი ODB სექტორის და DOC სამკუთხედის ფართობების სხვაობის ტოლია.

$$S_{DCB} = S_{ODB} - S_{DOC}.$$

ნახევარწრეწირის რადიუსი $R = \frac{AC + CB}{2} = 4$.

რადგან $CD \perp AB$, ამიტომ $CD = \sqrt{AC \cdot CB} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

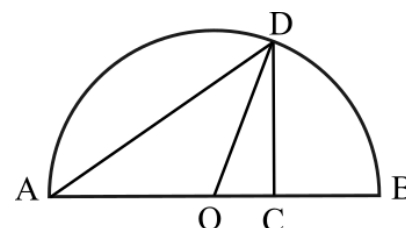
და $\operatorname{tg}(\angle DAC) = \frac{DC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ე.ი. $\angle DAC = 30^\circ$.

რადგან $\angle DAC$ წრეწირში ჩახაზული კუთხეა, ამიტომ მისი შესაბამისი DOB

ცენტრალური კუთხის სიდიდეა 60° . აქედან $S_{ODB} = \frac{\angle DOB}{360^\circ} \pi R^2 = \frac{8\pi}{3}$. რადგან

$$S_{DOC} = \frac{OC \cdot DC}{2} = \frac{(R - BC) \cdot DC}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}. \text{ ამიტომ } S_{DCB} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}.$$

$$\text{პასუხი: } S_{DCB} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}.$$



ამოხსნის ეტაპები

ა) გამოთვალა რადიუსი $R = 4$ ან დაწერა ფორმულა $S_{DCB} = S_{ODB} - S_{DOC}$

ბ) გამოთვალა CD მონაკვეთის სიგრძე: $CD = \sqrt{AC \cdot CB} = 2\sqrt{3}$;

გ) გამოთვალა $\angle DAC$ ან $\angle DOB$: $\angle DAC = 30^\circ$, $\angle DOB = 60^\circ$;

დ) გამოთვალა ODB სექტორის და DOC სამკუთხედის ფართობი;

ე) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა: ა.

2 ქულა: ბ; ან გ.

3 ქულა: ა, ბ, გ.

4 ქულა: ა, ბ, დ.

5 ქულა: ა, ბ, დ, ე.

(5) 27. ამოხსენით უტოლობა: $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} \geq \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

ამოხსნა

x ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე წარმოადგენს

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - \sqrt{x} \geq 0 \end{cases}$$

უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეს, ე.ი. $[1; \infty)$ შუალედს. გავამრავლოთ

უტოლობის ორივე მხარე $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ დადებით გამოსახულებაზე. მივიღებთ საწყისი

უტოლობის ტოლფას უტოლობას: $(\sqrt{x+\sqrt{x}})^2 - (\sqrt{x+\sqrt{x}})(\sqrt{x-\sqrt{x}}) \geq \frac{3}{2}\sqrt{x}$. ამ

უკანასკნელის გამარტივების შედეგად მივიღებთ:

$$x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} \geq \frac{3}{2}\sqrt{x},$$

$$2x - \sqrt{x} \geq 2\sqrt{x^2 - x}.$$

მიღებული გამოსახულების ორივე მხარე გავყოთ $\sqrt{x}$ -ზე, მივიღებთ:

$$2\sqrt{x} - 1 \geq 2\sqrt{x-1}.$$

რადგან $x \geq 1$, უკანასკნელი უტოლობის ორივე მხარე არაუარყოფითია, ამიტომ

უტოლობის ორივე მხარე შეგვიძლია კვადრატში ავიყვანოთ. მივიღებთ:

$$(2\sqrt{x} - 1)^2 \geq 4(x-1) \Leftrightarrow 4x - 4\sqrt{x} + 1 \geq 4x - 4 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{25}{16}.$$

პასუხი: $x \in \left[1; \frac{25}{16}\right]$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) შენიშნა, რომ $x > 0$;

ბ) დაადგინა x ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე: $[1; \infty)$;

გ) ტოლფასი გარდაქმნით მიიყვანა საწყისი უტოლობა $2x - \sqrt{x} \geq 2\sqrt{x^2 - x}$ უტოლობაზე;

დ) მიიღო $x \leq \frac{25}{16}$ უტოლობა;

ე) პასუხი.

1 ქულა: ა.

2 ქულა: ბ.

3 ქულა: ბ, გ.

4 ქულა: ბ, გ, დ.

5 ქულა: ბ, გ, დ, ე.