Тест по математике

Инструкция

Перед Вами электронный буклет экзаменационного теста.

Тест состоит из 33 задач.

Решение задач 31-33 должно быть записано в специально отведенном для них месте на листе ответов. В Вашей записи должен быть четко представлен путь решения задачи.

Учтите, что размеры чертежей, прилагаемых к некоторым задачам, могут не соответствовать указанным в условиях размерам. Поэтому не следует делать выводы о длинах отрезков или других величинах на основании размеров чертежа. Руководствуйтесь условием задачи.

Максимальная оценка теста – 52 балла.

Для выполнения работы Вам отводится 5 часов.

Желаем успеха!

Задача 1 **1 балл**

Если $|b-a| = b+a$ и $a>0$, то

ა) $b=0$ ბ) $b>0$ გ) $b<0$ დ) $b \neq 0$

Задача 2 **1 балл**

Пусть a и b такие натуральные числа, что $a > b$, и при делении a на 6 в остатке получается 1, а при делении $a^2 - b^2$ на 6 в остатке получается 3. Найдите множество всех тех остатков, которые можно получить от деления числа b на 6?

ა) $\{2\}$ ბ) $\{0; 2; 4\}$ გ) $\{4\}$ დ) $\{2; 4\}$

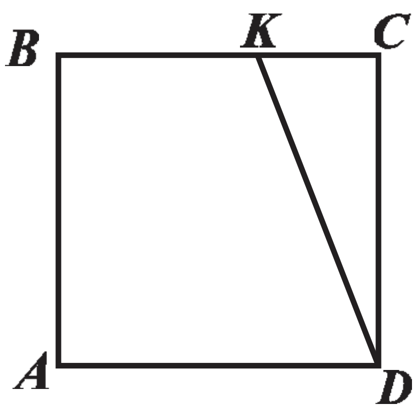
Задача 3 **1 балл**

Сколько целых чисел x удовлетворяют неравенству $0,01 < 2^x < 100$?

ა) 6 ბ) 7 გ) 12 დ) 13

Задача 4 **1 балл**

На стороне BC квадрата $ABCD$ взята точка K так, что отрезок DK делит квадрат $ABCD$ на две фигуры (см. рисунок), площади которых относятся друг к другу, как 1:5. Найдите отношение $KC : BK$.



ა) $\frac{1}{5}$ ბ) $\frac{1}{4}$ გ) $\frac{1}{2}$ დ) $\frac{2}{5}$

Задача 5 **1 балл**

Для всех целых чисел m и n, для которых выражение $\dfrac{12^m \cdot 2^{2n-m} \cdot 81}{4^n \cdot 3^m \cdot 81^m}$ равно целому числу, обязательно выполняется условие

ა) $m+n\geq 0$
ბ) $m\in\{0;1\}$
გ) $0\leq n\leq m$
დ) $m\leq n-1,\ n\geq 0$

Задача 6 **1 балл**

Найти множество решений уравнения $\log_2(-2x)+\log_2\left(x^2\right)=2$.

ა) $\left\{-\sqrt[3]{2}\right\}$ ბ) $\left\{\sqrt[3]{2}\right\}$ გ) $\{-1\}$ დ) $\varnothing$

Задача 7 **1 балл**

Какому условию, из перечисленных ниже, должны обязательно удовлетворять коэффициенты a, b и c, чтобы множеством значений функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ был интервал $(-\infty; -3]$?

ა) $a < 0$ и $b^2 - 4ac < 0$

ბ) $a > 0$ и $b^2 - 4ac < 0$

გ) $a > -3$ и $b^2 - 4ac < 0$

დ) $a < 0$ и $b^2 - 4ac > 0$

Задача 8 **1 балл**

В скольких точках пересекаются графики функций $y = x^2 - 5x - 3$ и $y = -x^2 + 3x - 7$?

ა) Ни в одной;

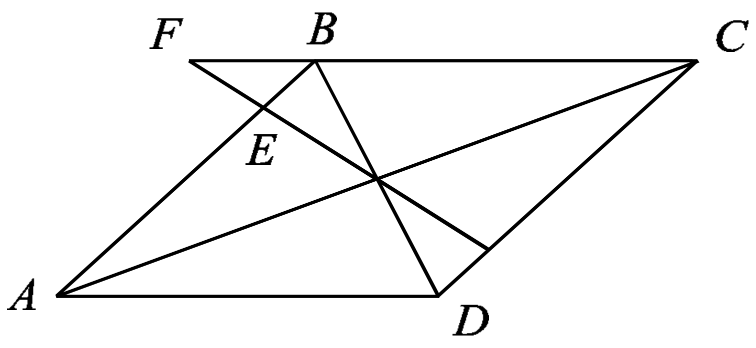
ბ) В одной;

გ) В двух;

დ) В бесконечно многих.

Задача 9 **1 балл**

Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей ромба $ABCD$, пересекает сторону AB в точке E, а продолжение стороны BC - в точке F так, как это указано на рисунке. Найдите длину стороны ромба, если $EB = a,\ BF = b$.



ა) $\dfrac{2ab}{b+a}$ ბ) $\dfrac{a(a+b)}{a-b}$ გ) $\dfrac{b(a+b)}{b-a}$ დ) $\dfrac{2ab}{b-a}$

Задача 10 **1 балл**

Для высказываний x и y определим операцию $x\#y$ посредством следующей таблицы истинности (в таблице символ «и» означает «истинно», а символ «л» - «ложно»:

x	y	$x\#y$
л	л	и
и	л	л
л	и	л
и	и	л

Какое из нижеперечисленных равенств всегда является истинным?

В этих равенствах $\neg x$ обозначает отрицание высказывания x, $x \wedge y$ есть конъюнкция (логическое «и») высказываний x и y, а $x \vee y$ - дизъюнкция (логическое «или») этих высказываний.

ა) $x\#y = x \wedge y$ ბ) $x\#y = x \vee y$ გ) $x\#y = \neg(x \wedge y)$ დ) $x\#y = (\neg x) \wedge (\neg y)$

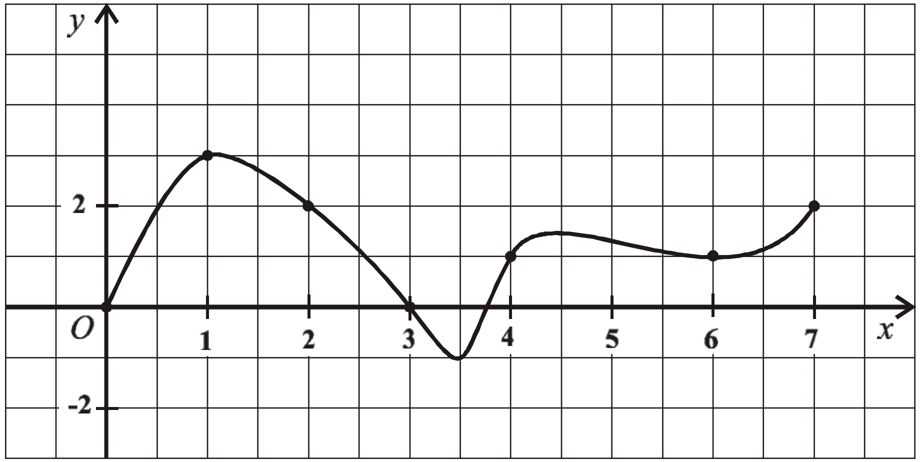
Задача 11 **1 балл**

Найдите наибольшее натуральное число, запись которого в двоичной системе счисления содержит пять цифр.

ა) девятнадцать; ბ) двадцать восемь; გ) тридцать один; დ) тридцать два.

Задача 12 **1 балл**

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенный на отрезке $[0;7]$.



С помощью данных, указанных на рисунке, вычислите $f(f(1)) \cdot f(5)$.

ა) 1

ბ) 1,5

გ) 0

დ) 5

Задача 13 **1 балл**

Масса $M = M(t)$ некоторого вещества в озере с течением времени t экспоненциально убывает (т.е. $M(t) = a \cdot e^{-kt}$, $a > 0, k > 0$). Через 12 часов с момента начала наблюдения масса вещества уменшилась на 50%. На сколько процентов уменьшится масса этого вещества через 36 часов с момента начала наблюдения?

ა) 74% ბ) 83% გ) 87,5% დ) 150%

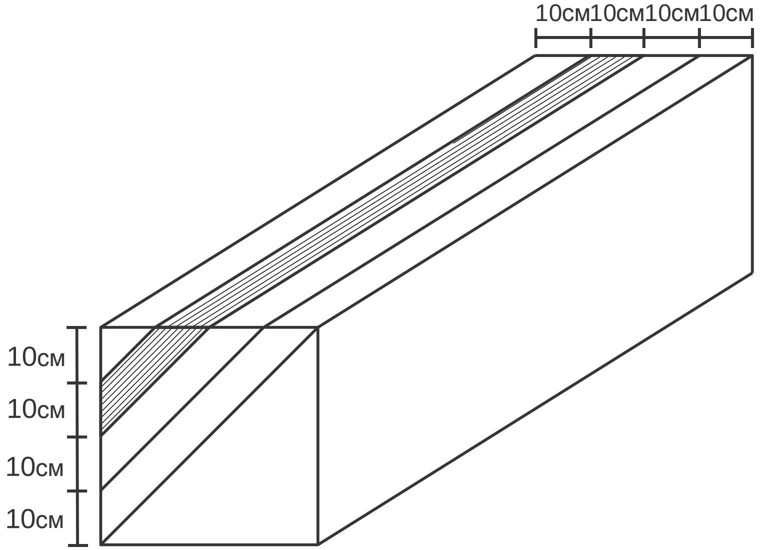
Задача 14 **1 балл**

Второй член бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен -3, а сумма прогрессии равна 4. Найдите знаменатель этой прогрессии.

ა) $-\frac{1}{2}$ ბ) $-\frac{3}{4}$ გ) $\frac{1}{2}$ დ) $-\frac{2}{3}$

Задача 15 **1 балл**

Прямоугольный параллелепипед объемом 1,6 м^3 распилили вдоль четырех параллельных плоскостей и получили пять прямых призм (см. рисунок). На рисунке одна из призм закрашена. Вычислите объем этой призмы по данным, указанным на рисунке.



ა) 0,1 м^3 ბ) 0,15 м^3 გ) 0,18 м^3 დ) 0,2 м^3

Задача 16 **1 балл**

Пусть A и B независимые события с вероятностями $P(A)=0,4$ и $P(B)=0,8$. Найдите вероятность события $A \bigcup B$.

ა) 1,2 ბ) 0,88 გ) 0,68 დ) 0,32

Задача 17 **1 балл**

Сколько решений имеет уравнение

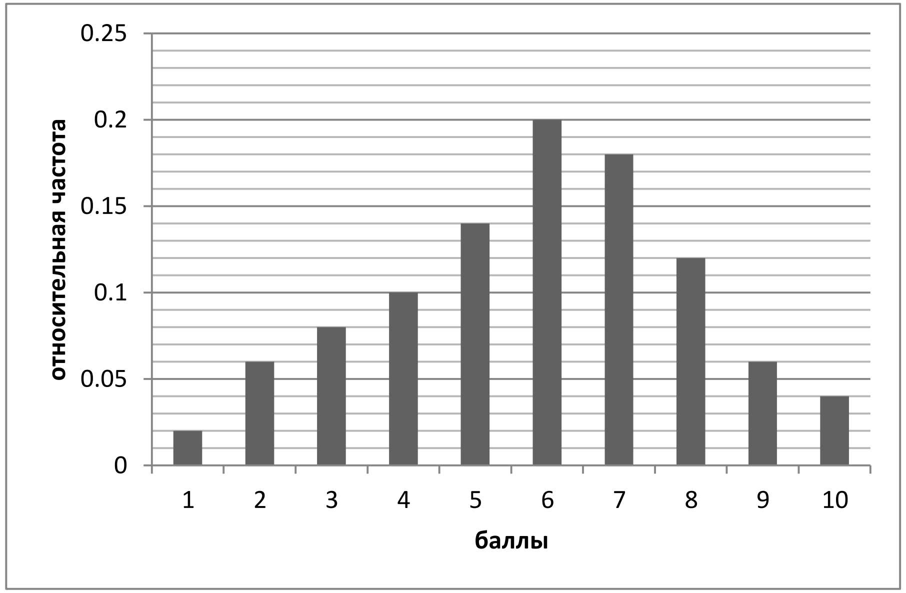
$$\left(2^{\sin x}\right)^{\sin x} \cdot \left(2^{\cos x}\right)^{\cos x} = 2$$

в промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

ა) Ни одного; ბ) Одно; გ) Два; დ) Бесконечно много.

Задача 18 **1 балл**

На школьном экзамене по математике задание, выполненное каждым учеником, оценивалось натуральным числом в диапазоне от 1 до 10 баллов включительно. На диаграмме приведены относительные частоты баллов, полученных учащимися на этом экзамене. Сколько учащихся получили оценку **<u>больше</u>** 8 баллов, если в школьном экзамене участвовало 200 учеников?



ა) 8 ბ) 22 გ) 44 დ) 20

Задача 19 **1 балл**

В прямоугольной системе координат даны шесть точек $A(1;1)$, $B(1;5)$, $C(3;5)$, $E(6;1)$, $F(4;1)$ и $G(4;2)$. При последовательном выполнении каких, из нижеприведенных, геометрических преобразований можно получить треугольник EFG из треугольника ABC?

ა) Симметрией относительно начала координат и поворотом;

ბ) Поворотом и параллельным переносом;

გ) Параллельным переносом и гомотетией;

დ) Гомотетией и поворотом.

Задача 20 **1 балл**

Если ненулевой вектор $\vec{c}$ есть векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $(\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b})$, то $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{a})=$

ა) $|\vec{a}|+|\vec{b}|$ ბ) $-|\vec{c}|$ გ) 0 დ) $|\vec{c}|$

Задача 21 **1 балл**

Функция $f(x)=\dfrac{100}{0,25+2e^{-0,1x}}$ определена на интервале $[0;+\infty)$. Какое из нижеперечисленных высказываний справедливо?

ა) Функция f - возрастающая и ограниченная;
ბ) Функция f - возрастающая и неограниченная;
გ) Функция f - убывающая и ограниченная;
დ) Функция f - убывающая и неограниченная.

Задача 22 **1 балл**

В прямоугольной системе координат Oxy задана прямая, определенная уравнением $2x+7y+1=0$. Найдите уравнение прямой, полученной поворотом заданной прямой на $90°$, вокруг точки ее пересечения с осью ординат.

ა) $49x+14y+2=0$ ბ) $49x-14y-2=0$ გ) $7x-2y-5=0$ დ) $7x+2y+1=0$

Задача 23 **1 балл**

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{2-\sin^2 x}{2-\cos^2 x}$.

ა) -1 ბ) $\dfrac{1}{2}$ გ) 1 დ) 2

Задача 24 **1 балл**

Отображение $f(z)=\overline{z}$ (число $\overline{z}$ - комплексно сопряженное к числу z) определяет на плоскости комплексных чисел

ა) осевую симметрию;

ბ) центральную симметрию относительно начала координат;

გ) поворот с центром в начале координат;

დ) параллельный перенос.

Задача 25 **1 балл**

Функция $f:[3;+\infty)\to[0;+\infty)$ определена равенством $f(x)=\sqrt{x-3}$. Найдите обратную функцию к функции f.

ა) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}},\ x\in(3;+\infty);$

ბ) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x+3},\ x\in[0;+\infty);$

გ) $f^{-1}(x)=x^2+3,\ x\in[0;+\infty);$

დ) Функция f не имеет обратной функции.

Задача 26 **1 балл**

Известно, что многочлен $f(x)=3x^3-4x^2+ax-14$ делится на многочлен $g(x)=x-2$ без остатка. Найдите значение параметра a.

ა) 2 ბ) 7 გ) 3 დ) 12

Задача 27 **1 балл**

Дан закон распределения случайной величины X в виде таблицы

x	1	2	3	4	5
$p(X=x)$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

ა) 1 ბ) $3,2$ გ) $\frac{7}{3}$ დ) $0,64$

Задача 28 **1 балл**

Точка $(3;7)$ лежит на графике функции $y = f(x)$, определенной на множестве положительных действительных чисел. Найдите $f(1)$, если известно, что $f'(x) = 2x + \frac{15}{x^2}$, $x \in (0; +\infty)$.

ა) 3
ბ) -11
გ) -4
დ) 10

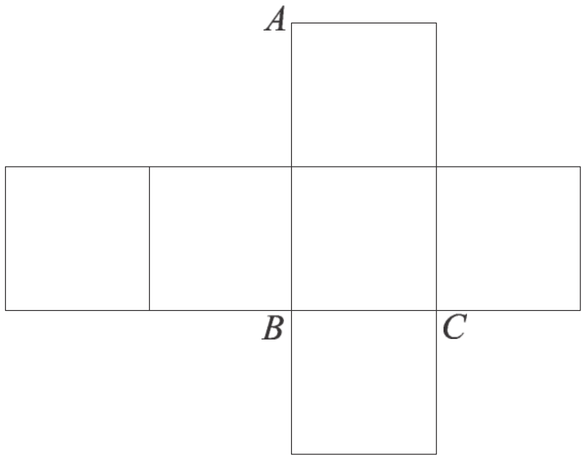
Задача 29 **1 балл**

Найдите сумму параметров b и c, если известно, что функция $R(x)=\dfrac{x^3+bx^2+cx}{x-1}$ не имеет вертикальных асимптот.

ა) -1
ბ) -4
გ) 4
დ) Невозможно найти сумму параметров b и c.

Задача 30 **1 балл**

Вершины A, B и C куба изображены на развертке этого куба (см. рисунок). Найдите в кубе величину угла BAC.



ა) 30° ბ) 45° გ) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ დ) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$

Задача 31

10 баллов

1) Приведите определение скалярного произведения векторов через длины (модули) этих векторов и углом между ними. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|.$$ (2 балла)

2) Докажите, что для любых веторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и для любого действительного числа m

$$(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$ (2 балла)

3) Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, лежащие на координатной плоскости, записаны в координатах: $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2.$$ (2 балла)

4) Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, лежащих на одной плоскости

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$ (2 балла)

5) Используя скалярное произведение векторов, докажите теорему Пифагора. (2 балла)

Задача 32 **5 баллов**

В прямоугольной системе координат Oxy изобразите графически множество всех решений неравенства:

$$\left(x^2+4x-y-5\right)\left(2x-y+3\right)\le 0.$$

Задача 33 **7 баллов**

Функция g определена равенством $g(x)=\dfrac{3x-1}{2x+9}$, где x действительное число.

1) Найдите область определения и множество значений функции g. Решение изложите ясно, на понятном для учащихся языке. (3 балла)

2) Найдите область определения и множество значений функции f, определенной равенством $f(x)=g(g(x))$. Решение изложите ясно, на понятном для учащихся языке. (4 балла)