მასწავლებლის კომპეტენციის დადასტურება

ტესტი მათემატიკაში

(2019 წელი, ნოემბერი)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ა	დ	დ	გ	ბ	ა	ა	გ	დ	დ	გ	გ	გ	ა	ბ

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ბ	დ	დ	დ	გ	ა	ბ	ბ	ა	გ	გ	ბ	ბ	ა	დ

ქვემოთ თითოეული ღია დავალებისათვის ნიმუშად წარმოდგენილია ერთ-ერთი **შესაძლო პასუხი, რომლებიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება.**

ამოცანა 31 **10 ქულა**

1) განსაზღვრეთ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ვექტორების სიგრძის (მოდულების) და მათ შორის მდებარე კუთხის საშუალებით. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისთვის

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|.$$ (2 ქულა)

2) დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისთვის და ნებისმიერი ნამდვილი m რიცხვისთვის

$$(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right).$$ (2 ქულა)

3) დაამტკიცეთ, რომ თუ საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ჩაწერილია კოორდინატებით: $\vec{a}=(a_1,a_2),\ \vec{b}=(b_1,b_2)$, მაშინ

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2.$$ (2 ქულა)

4) დაამტკიცეთ, რომ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი $\vec{a},\ \vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებისთვის

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$ (2 ქულა)

5) სკალარული ნამრავლის გამოყენებით დაამტკიცეთ პითაგორას თეორემა. (2 ქულა)

ამოხსნა

1. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება გამოსახულებას $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$, სადაც $|\vec{a}|$ და $|\vec{b}|$ შესაბამისად $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების მოდულებია, ხოლო α - კუთხე ამ ვექტორებს შორის.

   თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ნებისმიერი არანულოვანი ვექტორებია, მაშინ $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\alpha|\le|\vec{a}||\vec{b}|$.

   თუ $\vec{a}=\vec{0}$ ან $\vec{b}=\vec{0}$ მაშინ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

2. თუ $m>0$ ხოლო $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი ვექტორებია, მაშინ $m\vec{a}$ არის $\vec{a}$-ს თანამიმართული ვექტორი, ამიტომ ამ ვექტორებს შორის კუთხე $\beta=m\vec{a},\vec{b}=\vec{a},\vec{b}=\alpha$ და $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=|m\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\beta=m|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

   თუ $m<0$, მაშინ $m\vec{a}$ არის $\vec{a}$-ს საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორი, ამიტომ

   $\beta=m\vec{a},\vec{b}=180^\circ-\alpha$ და $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=|m\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\beta=-m|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot(-\cos\alpha)=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

   თუ $m=0$ ან $\vec{a}=\vec{0}$ ან $\vec{b}=\vec{0}$ მაშინ $m\vec{a}\cdot\vec{b}=m\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=0$

3. თუ $\vec{a}=(a_1,a_2),\ \vec{b}=(b_1,b_2)$, მაშინ $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$.

   $2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2-(a_1^2+a_2^2)-(b_1^2+b_2^2)=2(a_1a_2+b_1b_2).$

4. ჩავწეროთ $\vec{a},\ \vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორები კოორდინატების საშუალებით: $\vec{a}=(a_1,a_2),\ \vec{b}=(b_1,b_2),\ c=(c_1,c_2)$, მაშინ წინა პუნქტში დამტკიცებულის თანახმად

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=a_1\left(\vec{b}+\vec{c}\right)_1+a_2\left(\vec{b}+\vec{c}\right)_2=a_1\left(b_1+c_1\right)+a_2\left(b_2+c_2\right)=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

5. განვიხილოთ სამკუთხედი ABC, სადაც $\angle C$ მართია, მაშინ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$, და $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{CB}$ ვექტორები ურთიერთმართობულია. ამიტომ

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{CB}\right|^2.$$

რაც წარმოადგენს პითაგორას თეორემას.

ამოცანა 32 5 ქულა

Oxy მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყეზე გრაფიკულად გამოსახეთ

$$\left(x^2+4x-y-5\right)\left(2x-y+3\right)\leq 0$$

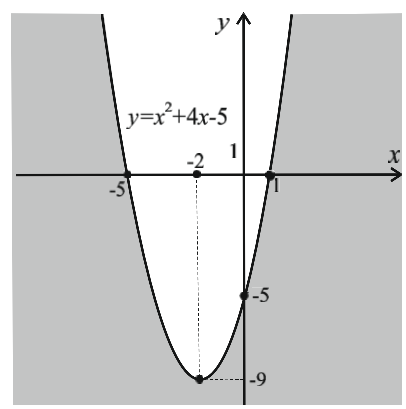
უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე.

ამოხსნა

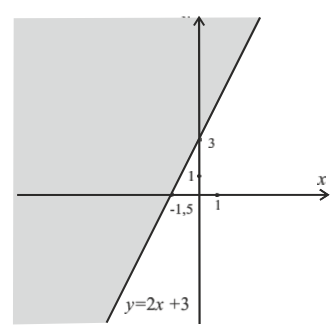
უტოლობა $\left(x^2+4x-y-5\right)\left(2x-y+3\right)\leq 0$ ტოლფასია შემდეგი უტოლობათა სისტემების ერთობლიობის:

$$\left(x^2+4x-y-5\right)\left(2x-y+3\right)\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+4x-y-5\geq 0\\2x-y+3\leq 0\end{cases}\\\begin{cases}x^2+4x-y-5\leq 0\\2x-y+3\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}y\leq x^2+4x-5\\y\geq 2x+3\end{cases} & (1)\\\begin{cases}y\geq x^2+4x-5\\y\leq 2x+3\end{cases} & (2)\end{array}\right. .$$

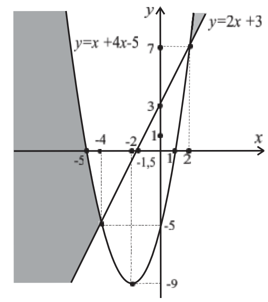
უტოლობათა (1) სისტემისთვის Oxy მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყეზე გრაფიკულად გამოვსახოთ ამონახსნთა სიმრავლე, ამისათვის ჯერ ავაგოთ $y=x^2+4x-5$ განტოლების შესაბამისი პარაბოლა და ვიპოვოთ არე, სადაც სრულდება უტოლობა $y\leq x^2+4x-5$. მივიღებთ შემდეგ სურათს.



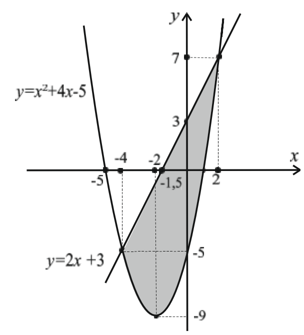
ანალოგიურად, $y\geq 2x+3$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეს ექნება შემდეგი სახე



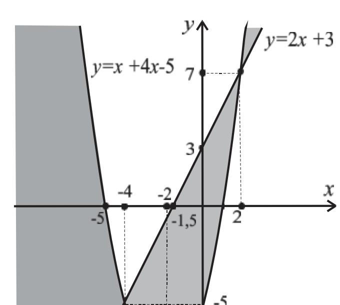
უტოლობათა (1) სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს გამუქებული არეების თანაკვეთას. (იხ. სურათი)



უტოლობათა (2) სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე გამოსახულია სურათზე.



საბოლოოდ, მოცემული უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე იქნება (1) და (2) სისტემების ამონახსნთა სიმრავლეების გაერთიანება (იხ. სურათი).



ამოცანა 33 **7 ქულა**

g ფუნქცია განსაზღვრულია ტოლობით $g(x)=\dfrac{3x-1}{2x+9}$, სადაც x ნამდვილი რიცხვია.

1) იპოვეთ g ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე. პასუხი წარმოადგინეთ მოსწავლისათვის გასაგებ ენაზე. (3 ქულა)

2) იპოვეთ $f(x)=g(g(x))$ ტოლობით განსაზღვრული f ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე. პასუხი წარმოადგინეთ მოსწავლისათვის გასაგებ ენაზე. (4 ქულა)

ამოხსნა

1) ვიპოვოთ g ფუნქციის განსაზღვრის არე: $2x+9\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -\dfrac{9}{2}$.

ე.ი. g ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(g)=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{9}{2}\right\}$.

ვთქვათ, y ეკუთვნის g ფუნქციის მნიშვნელობათა $R(g)$ სიმრავლეს. მაშინ არსებობს $x\in D(g)$ ისეთი, რომ $\dfrac{3x-1}{2x+9}=y$. ამ ტოლობიდან ვღებულობთ $2xy+9y=3x-1$ ტოლობას, რომელიც $x(2y-3)=-1-9y$ ტოლობის ტოლფასია. ამ განტოლებას მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს ამონახსნი x-ის მიმართ, როდესაც $y\neq\dfrac{3}{2}$.

ე.ი. $R(g)=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

პასუხი: $D(g)=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{9}{2}\right\}$; $R(g)=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

2) $g(g(x))$ გამოსახულებას აზრი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც x და $g(x)$ რიცხვები ეკუთვნის g ფუნქციის განსაზღვრის არეს, ე.ი. $x\neq -\dfrac{9}{2}$ და $\dfrac{3x-1}{2x+9}\neq -\dfrac{9}{2}$. ამ უკანასკნელი უტოლობის გამარტივებით მივიღებთ $x\neq -\dfrac{79}{24}$. ე.ი. $D(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{79}{24}\right\}$.

f ცხადი სახით ჩაიწერება შემდეგი ფორმულით: $f(x)=\dfrac{7x-12}{24x+79}$, $x\in D(f)$.

$\dfrac{7x-12}{24x+79}$ გამოსახულების მნიშვნელობა $x=-\dfrac{9}{2}$-ზე ტოლია $\dfrac{3}{2}$-ის. ამიტომ $\dfrac{3}{2}\notin R(f)$.

ვთქვათ b რიცხვი ეკუთვნის f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს, მაშინ $\dfrac{7x-12}{24x+79}=b$ განტოლებას უნდა გააჩნდეს ამონახსენი ფუნქციის განსაზღვრის არედან.

$\dfrac{7x-12}{24x+79}=b \Leftrightarrow x=\dfrac{91}{7-24b}$, საიდანაც მივიღებთ, რომ $b\neq\dfrac{7}{24}$, ე.ი., $\dfrac{7}{24}\notin R(f)$.

პასუხი: $D(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{79}{24}\right\}$, $R(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{24}\right\}$.